

# Mekanik Problemleri

Yazar - Author

Prof. Jaan KALDA

Çeviri Ekibi - Translation Team

FenTek Olimpiyat Topluluğu – SciTech Olympiad Society

*Bahcesehir Fen ve Teknoloji Lisesi, FenTek Olimpiyat, İstanbul, TÜRKİYE*

*Bahcesehir High School for Science and Technology, BHSSciTech, Istanbul, TURKEY*

A. Alperen ŞEN

Kaan DERE

Alper TEZCAN

M. Anıl İŞKESEN

Emir AKDAĞ

Editörler - Editors

Alper TEZCAN

Alkın KAZ

Berkin BINBAŞ

Mert ÜNSAL

İletişim için e-posta / E-mail for correspondence: [alpertezcan1769@gmail.com](mailto:alpertezcan1769@gmail.com)

Versiyon - Version

1.21  $\beta$  (tr) — Nisan/April 2020

v1.2 $\beta$  — Sürüm v1.0 ile karşılaştırıldığında, giriş teori bölümleri eklendi.

v1.2 $\beta$ (tr) — Türkçeye çevrildi.

v1.21 $\beta$  — “Çevirmenler Eki” olan bölüm 8 eklendi.

v1.2 $\beta$  — As compared with v1.0, introductory theory sections are added.

v1.2 $\beta$ (tr) — Translated to Turkish.

v1.21 $\beta$  — Section 8, “Translators Appendix,” is added.

**Daha fazla Türkçe Fizik kaynakları için FenTek Olimpiyat websitemizi linke tıklayarak ziyaret edebilirsiniz!  
Büyük emeklerle Türkçeye çevirilen bu kaynakları paylaşarak bize destek olabilirsiniz!**

## Sorumluluk Reddi

FenTek Olimpiyat çevirmen ekibi olarak tutarlılık konusunda ciddi bir hassasiyet göstermemize rağmen olası çeviri hataları ya da anlaşılmayan noktalarda **metnin orijinaline** danışılmalıdır. Orijinal metin ile çeviri metin arasındaki anlam farklılıklarından doğabilecek herhangi bir sorunda bu kitapçığın çevirisi, basımı ve dağıtımı başta olmak üzere herhangi bir şekilde oluşumunda yer almış kimseler sorumlu tutulamaz.

## Disclaimer

Although we, SciTech Olympiads translation team, have shown a complete sensitivity in terms of consistency, the **original text** should be consulted at possible translation errors or incomprehensible points. People involved in the formation, including the translation, printing, and distribution of this booklet are not responsible for any problem that may arise from the meaning differences between the original and the translation text.

# 1 GİRİŞ

Bu kitapçık, Kinematik kitapçığına bir devam niteliği taşımakta olup<sup>1</sup> iki ana bölümden oluşmaktadır: *Bölüm 3 — Statik* ve *Bölüm 4 — Dinamik*. *Bölüm 5 — Konu Tekrar Problemleri* ise tekrar problemlerinden oluşmaktadır. Bu problemlerin amacı olimpiyattaki mekanik sorularının çoğunun (> 95%) çözümünde kullanılacak önemli çözüm fikirlerini sunmaktır. Kitapçıkta genelde önce problem açıklanmış, ve sonra problemle ilgili çözüm fikirleri ve öneriler gözden geçirilmiştir (çözüm fikirlerinin önündeki ‘K’ harfi, kinematik kitapçığındaki karşılıklı gelen çözüm fikrini kastetmektedir). Problemlerin cevapları kitapçığın sonunda, ipuçlarından (*Bölüm 6*) sonra, *Bölüm 7* içerisinde yer almaktadır. Problemi çözerken ipuçlarını en son, ancak tüm uğraşlarımız işe yaramadığı takdirde kullanmanız tavsiye edilir (problemi kendi başınıza çözebilmiş olsanız bile ipuçlarında da aynı yolla çözüm önerilip önerilmediğini kontrol etmenizde fayda var).

Bu kitapçığın hazırlanışındaki ana prensip, çoğu olimpiyat sorusunun belli temaların farklı “varyasyonları” olduğunu savunur: Problemlerin cevapları problem tiplerine karşılık gelen çözüm fikirleri kullanılarak bulunmaktadır. Yeteri kadar çalışıldığında verilen probleme karşılık gelen çözüm fikrini tespit etmek çoğu durumda çok zor değildir. Tüm önemli çözüm fikirlerini soruları çözerken keşfetmek, öğrenme sürecini eğlenceli ve yaratıcı hale getirir; fakat o fikirleri üretmek ve üretmeyi öğretmek bir hayli zor bir iştir. Ayrıca, yeni bir çözüm fikri üretmek çok uzun zaman almaktadır ve olimpiyat için bu fikirleri kullanmak zorunda olanlar, var olan çözüm fikirlerini çalışıp tam anlamıyla hakim olan kimselere göre dezavantajlıdır.

Bilimde genelde çözüm fikirleri olimpiyattakine benzer bir rol oynamaktadır: çoğu bilimsel makale yeni problemlere (ya da eski) çözüm geliştirirken bilinen fikirleri kullanır. Gerçekten yeni ve iyi fikirlerin üretimi çok nadir gerçekleşmektedir ve sonradan bu yeni fikirlerin çoğu bilimin yapıtçıları olarak tarihin sahnesinde yerini alır. Fakat, büyük çerçevede bakıldığında bilimsel fikirler sadece mekaniği kapsamamaktadırlar ve bu fikirleri doğru yerde analiz edip kullanmak kolay bir iş değildir. Bu yetenek çok değerlidir ve ayrıca yaygın biçimde bilinen bir fikri de yepyeni bir duruma uyarlayabilmek önemli bir başarıdır.

Çözüm fikirlerinden başka, bu kitapçık ayrıca “olgu” ve “yöntem” terimlerini sunmaktadır. Bu terimler arasındaki fark metin süresince dikkat edilmesine rağmen çok katı değildir, bu yüzden bazı çözüm fikirleri yöntem ya da olgu şeklinde anlaşılabilir. Olgular problemlerin çözümünde yararlı olabilecek fakat hazır bir formülle ifade edilmeyen temel veya özel bulgu ve gerçekliklerdir. Teorik olarak, tüm problemler temel prensipler (olgular) kullanılarak çözülebilir. Fakat bu tip bir “kaba kuvvet” yöntemi çoğu zaman uzun ve karışık matematiksel hesaplamalara yol açmaktadır; dolayısıyla çözüm “fikirleri” bu tip durumlarda problemin çözümünü bir hayli kısaltmak için kullanılmaktadır. “Yöntemler” ise geniş bir yelpazede kullanım olanağı olan güçlü çözüm “fikirleri”dir.

## 1. GİRİŞ

Problemler için birkaç farklı kaynak kullanılmıştır: Estonya Yerel ve Ulusal Olimpiyatları, Estonya-Finlandiya Olimpiyatları, Uluslararası Fizik Olimpiyatları, “Kvant” dergisi, Rusya ve Sovyetler Birliği Olimpiyatları; bazı sorularda bir takım değişikliklere gidilmiştir (kolay ya da zor olacak şekilde), bazı sorular ise anonimdir ve kaynağı bilinmemektedir. Kinematik kitapçığına benzer şekilde problemler şu şekilde sınıflandırılmıştır: **basit**, **orta**, ve **zor**. Problem numaraları zorluk seviyesine göre renk kodu ile yazılmıştır (zorluk seviyesinin öznel bir kavram olduğunu unutmayınız!). Son olarak, birkaç bölümü ya da problemi anlamadığınız takdirde umutsuzluğa düşmeyiniz, sıradaki bölüme ya da probleme geçiniz: Anlamadığınız yere sonradan dönebilirsiniz.

## 2 TEMEL YASALAR — TEORİK TEMEL

Mekaniğin temel yasalarına aşina olanlar bu Bölüm’ü geçip Bölüm 3’ten başlayabilirler (yine de okuyabilirsiniz, yeni bir bakış açısı kazanabilirsiniz). Aslında, okuyucuların çoğunun bu bölümü atlaması muhtemeldir çünkü neredeyse tüm fizik kursları klasik mekanik ile başlar, ve okuyucunun temel dersleri almadan ileri düzeyde problem çözme kabiliyeti geliştirecek bu kitapçığa yönelmesi çok düşük bir ihtimaldir. Ancak yine de kitapçığın okurun kendi başına çalışabilmesi için belirli bir yeterlilikte bulunması adına bu bölüm eklenmiştir. Bu bölüm içerik açısından bir hayli sıkıştırılmış durumdadır ve bazı yerlerde başlangıç seviyesinde olanlar için *görünüşte* göz korkutucu matematiksel ifadeler içermektedir (örneğin toplam sembolünün “ $\sum$ ” kullanımı ve diferansiyeller), bu yüzden kolay bir okuma deneyimi sunmamaktadır. Başlangıç için bu bölümü çok zor bulduysanız, lise seviyesinde mekanik konu anlatımı kitabıyla başlayabilir ve sonra “Statik” bölümüne geçebilirsiniz.

### 2.1 Klasik Mekanik Postulatları

Bu kitapçığın konusu olan klasik mekanik, sadece Newton’un üç yasasını temel alan bir bilim dalıdır.<sup>2</sup> Bu yasaları burada birer “olgu” olarak açıklayacağız.

**Olgu 1:** (Newton’un Birinci Yasası) Cisimlerin hareketi, incelendikleri referans sistemine bağlıdır (örneğin bir referans sisteminde sabit hızla giden bir cisim, eğer bu referans sistemine göre bağlı ivmesi sıfır olmayan bir referans sisteminde incelenirse belirli bir ivmeyle hareket ediyor olacaktır), ve Olgular 2, 3, 4 ve 5’in tüm cisimler için geçerli olduğu, ismine *eylemsiz referans sistemi* dediğimiz referans sistemleri vardır.

**Olgu 2:** (Newton’un İkinci Yasası) Eylemsiz bir referans sisteminde bir cismin sıfırdan farklı “ $\vec{a}$ ” ivmesinin kaynağı her zaman dış bir *etkidir*; her bir cisim ona ait bir *eylemsizlik kütlesi*  $m$  ile karakterize edilebilir (kitapçığın geri kalamında bu kavram eylemsizlik kütlesi olarak değil de kütle olarak geçecektir) ve her etki *kuvvet* denilen vektörel bir  $\vec{F}$  niceliği ile her bir cisim-etki ikilisi için  $\vec{F} = m\vec{a}$  eşitliği geçerli olacak şekilde gösterilebilir.

<sup>1</sup>Çevirmen Notu (Ç. N.): Okuyucu eğer Kinematik kitapçığını okumadıysa panik yapmamalıdır zira gerekli bilgileri Jaan Kalda yeri geldikçe açıklamıştır.

<sup>2</sup>I. Newton (1687).

<sup>3</sup>bu referans noktası kütle birimi olarak kullanılacaktır.

<sup>4</sup>veya 39,17mm yüksekliğe ve çapa sahip Platinyum-İridyum Pt-10Ir alaşımından yapılmış bir silindirin kütlesi (resmi SI tanımı).

## 2.2 Postulatlardan Ulaşılan Temel Kurallar

Kütle için bir referans noktası belirlediğimiz zaman<sup>3</sup>, örneğin 1 kilogram, suyun bir metre küpünün kütlesi olarak tanımlanabilir<sup>4</sup>, Olgu 2 aynı zamanda bir cismin kütlesinin ve bir cismin üzerine uygulanan kuvvetin büyüklüğünün **tanımını** verir. Gerçekten, eğer büyüklüğü sürekli aynı olan ve herhangi bir cisim üzerine uygulanabilen bir *referans kuvvetimiz* olursa (belli bir miktar sıkıştırılmış veya gerilmiş bir yay buna bir örnektir) herhangi farklı bir cismin kilogram biriminden sayısal kütlesinin, o cismin referans kuvvet etkisi altındaki ivmesinin referans kütlesinin aynı kuvvet etkisi altındaki ivmesine oranına eşit olduğunu söyleyebiliriz<sup>5</sup>. Eğer bu tanım kendi içerisinde tutarlı ise, yani elde edilen kütle kullanılan referans kuvvetinden bağımsız ise, Newton'un 2. Yasası geçerlidir. Benzer şekilde, herhangi bir kuvvetin büyüklüğü, Newton ( $N \equiv \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$  şeklinde verilir) cinsinden, o kuvvetin etki ettiği cismin kütlesi ile ivmesinin çarpımı olarak tanımlanabilir. Eğer sonuç, kullanılan bu test cisimden bağımsız ise bu tanım kendi içinde tutarlıdır ve Newton'un 2. Yasası geçerlidir.

Özetlemek gerekirse, Newton'un 2. Yasası  $\vec{F} = m\vec{a}$  bize hem bir cismin kütlesinin tanımını (bir referans kütle seçtiyssek), hem de bir etkileşimin kuvvetinin tanımını verir. Yasa aynı zamanda bu iki tanımın kendi içlerinde tutarlı olduğunu garantiler: Bir cismin kütlesi veya bir kuvvetin büyüklüğü, ölçüm yönteminden bağımsızdır.

**Olgu 3:** Kuvvetler, vektörel olarak toplanabilir niceliklerdir: Eğer bir  $m$  kütlesine etki eden birden fazla kuvvet  $\vec{F}_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) varsa Olgu 2,  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  ile geçerliliğini sürdürür.

Vektörel toplam  $(\sum_i \vec{F}_i)$ , paralelkenar/üçgen kuralı kullanılarak ya da bileşenlerin aritmetik toplamları şeklinde hesaplanabilir:  $F_x = \sum_i \vec{F}_{ix}$ , burada  $x$  indisi, vektörün  $x$  bileşenini ( $x$  eksenine olan izdüşümünü) belirtir. Benzer ifadeler  $y$  ve  $z$  eksenleri için de yazılabilir.

**Olgu 4:** Kütleler toplanabilir skaler niceliklerdir: Eğer bir cisim küçük  $m_j$  ( $j = 1 \dots m$ ) parçalarından oluşuyorsa cismin toplam kütlesi, bileşenlerinin kütlelerinin toplamına eşittir:  $m = \sum_j m_j$ .

**Olgu 5:** (Newton'un Üçüncü Yasası) Eğer bir  $A$  cisim,  $B$  cismine  $\vec{F}$  kuvveti uyguluyorsa eşzamanlı olarak  $B$  cisim de  $A$  cismine eşit büyüklükte fakat zıt yönde olan  $-\vec{F}$  kuvvetini uygular.

## 2.2 Postulatlardan Ulaşılan Temel Kurallar

Olgular 1, 2, 3, 4 ve 5, Klasik (Newton) Mekanik'inin deneyler tarafından doğrulanmış postulatları kabul edilebilirler: *Tüm diğer "olgular", teoremler ve diğerleri bu postulatlar kullanılarak matematiksel yollarla türetilebilir.*

Şimdiye kadar *bir cismin ivmesini* hep üstü kapalı bir biçimde ele aldık. Cisim yalnızca *öteleme hareketi* yaptığında

<sup>3</sup>(Ç. N.) Asıl değer, yazarın belirttiği oranın tersidir (yani cismin kütlesi, referansın ivmesinin cismin ivmesine bölümüdür) ancak bu durum paragraf boyunca anlatılmak istenen fikre etki etmediği dolayısıyla okuyucunun dikkatine sadece bir dipnot düşmek ile yetinildi.

<sup>4</sup>Örneğin katı cisimler: Bu durumda noktasal cisimler makroskopik cisimler oluşturacak şekilde moleküller arası kuvvetler tarafından bir arada tutulur.

<sup>5</sup>Burada kuvvetin yalnızca cisimlerin koordinatlarından ve hızlarından bağımlı olduğunu varsayıyoruz. Bu durum *Abraham-Lorentz* kuvveti (siklotron radyasyonu hesabında kullanılır) dışında sağlanır.

<sup>6</sup>Aynı zamanda çok cisimli sistemlerde başlangıç koşullarındaki küçük bir değişikliğin eksponansiyel büyüyen farklılıklara yol açmasına sebep olabilen kaotik davranışlar da görülebilir — tıpkı sivri bir kalemi dik bir biçimde ucunun üzerinde duracak şekilde düz bir yüzeye yerleştiremememiz gibi.

veya başka bir deyişle cismin her noktası aynı ivme vektörüyle hareket ettiği sürece bunda hiçbir sorun yoktur. Fakat, eğer ki cisim yeterli derecede büyükse ve dönerek hareket ediyorsa bu durumda farklı noktaların ivmeleri de farklı olur. Bu durumda hangi noktanın ivmesinin esas alınacağı konusunu açıklamamız gerekir. Bu sorunun üstesinden gelmek ve Olgu 1'den Olgu 5'e postulatlarımızı olabildiğince basit kılmak için Olgu 2'nin yalnızca *noktasal cisimler*, yani bir diğer deyişle aldıkları yola kıyasla ihmal edilebilir boyuttaki cisimler için geçerli olduğunu varsayalım. Dolayısıyla bir noktasal cismin konumu, artık açıkça tanımlanmış bir hıza ve ivmeye sahip bir noktayla ifade edilebilir. İhmal edilemeyecek boyuttaki cisimler için Olgu 2, bu cisimleri hayali olarak her biri birer noktasal cisim gibi davranan küçük parçalara ayırmamız yoluyla genelleştirilebilir.

Başlangıç olarak (bakınız Ek 1), Newton'un 2. Yasası'nın daha kapsamlı bir hali türetilebilir.

**Olgu 6:** (Momentum korunumu yasası/Newton'un 2. Yasası'nın genelleştirilmiş hali) Toplam momentumu  $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$  olan noktasal bir cisim sistemi için<sup>6</sup>,

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}, \quad (1)$$

burada  $\vec{F}$  sisteme etki eden net kuvvettir (*dış kuvvetlerin toplamı*). Eğer  $\vec{F} = 0$  ise toplam momentum korunur. ( $\vec{P} = \text{sabit}$ )

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i$  (burada  $\vec{r}_i$ ,  $i$ . noktasal cismin konum vektörünü belirtir) eşitliğini yerine koyarak Denklem (1) aşağıdaki şekilde yazılabilir:  $M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \vec{F}$ , burada,

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad (2)$$

*kütle merkezidir*. Bu sonuç şunu açıklar: Katı cisimlerde eğer kütle merkezinin ivmesini kullanırsak 2. Olgu geçerlidir.

Newton'un 2. Yasası'na göre, cisimler arasında kuvvetlerin cisimler arası uzaklık ve hızlara nasıl bağlı olduğunu bilirsek (teoride) sistemin zamanla nasıl evrileceğini bilebiliriz (bu tarz sistemlere *deterministik sistemler* denir.). Aslında, tüm cisimlerin ivmelerini bildiğimiz için küçük bir zaman değişikliğinden sonra cisimlerin hızlarını ve konumları hesaplayabiliriz: Eğer  $\Delta t$  zaman aralığı yeterince küçükse ivmenin  $\Delta \vec{a}_i$  kadar değişimi ihmal edilebilir, bu durumda  $i$ . cismin yeni hızı  $\vec{v}_i' = \vec{v}_i + \vec{a}_i \Delta t$  ve yeni konum vektörü  $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{v}_i \Delta t$  olur; zamana bağlı tüm değişkenler  $\vec{v}_i(t)$  ve  $\vec{r}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$  ve burada  $N$  toplam cisim sayısıdır) zamanda adım adım ilerleyerek elde edilebilir. Matematiksel bir dille bu durum bir *adi diferansiyel denklemler sisteminin* sayısal integrasyonudur: Koordinatların ikinci dereceden türevleri  $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ ; koordinatlar  $x_i, y_i, z_i$  ve birinci dereceden türevleri  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$  cinsinden ifade edilir<sup>7</sup>. Prensipte, bu hesaplamalar yeterli bilgisayar gücüne sahip olduğumuz varsayılarak en azından nümerik olarak her zaman yapılabilir, fakat pratikte bu işin işlemsel yükü çok ağır olabilir<sup>8</sup>. Temel

olan 1–5. Olgularını hariç tuttuğumuzda, Newton Mekaniği, bu diferansiyel denklemlerin kolay bir biçimde çözülebilmesi için oluşturulmuş yöntemler bütünüdür.

Bu yöntemlerin arasında, korunum yasalarını bulmak ve kullanmak önemli bir yer kaplar. Bunun böyle olmasının sebebi, yukarıda bahsedildiği üzere mekanik sistemlerin diferansiyel denklemler sistemiyle ifade edilebilmeleri ve her korunum yasasının o sistemin derecesini bir azaltıp matematiksel yükü hafifletmesidir. Korunum yasaları Newton'un yasalarından matematiksel olarak çıkarılabilir ama tabii ki her ne kadar nasıl yapıldığını bilmek önemli olsa da çoğu mekanik sorusu bunu bilmeden de çözülebilir. Dolayısıyla, korunum yasaları Ekler 1, 2, ve 3'te çıkarılmıştır. Biz ise burada yalnızca formlerden bahsedeceğiz. Zaten momentum korunum yasasından bahsetmiştik (Olgu 6'ya bkz.), böylece sıradakine geçebiliriz.

**Olgu 7:** (Açısal momentumun korunumu yasası.) Cisimlerden oluşan bir sistemin toplam açısal momentumu  $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$  için aşağıdaki denklem geçerlidir:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{T}, \quad (3)$$

burada  $\vec{T} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  sistemin üstüne etkiyen net torktur,  $\vec{F}_i$  de  $i$ . noktasal cisme etki eden net kuvvettir. Denklemden anlaşılacağı üzere, sistemin net açısal momentumunun korunması için  $\vec{T} = 0$  olmalıdır.

Cisimlerin dönme hareketinde Newton'un İkinci Yasası sayılabilecek Denk. (3), Ek 2'de türetilmiştir.

Üç boyutlu sistemlerle çalışırken net torku ve açısal momentumu bulmak için vektörel çarpımları hesaplamak zor olabilir. Neyse ki çoğu olimpiyat sorusu iki boyutlu sistemlerle ilgilenir: Hızlar, momentumlar, konum vektörleri  $x$ - $y$  düzleminde yer alır ve vektörel çarpımlar  $z$  eksenine paraleldir, yani  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  ve  $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$  vektörleri  $z$  eksenine izdüşümleri tarafından nitelendirilen skalerler olarak düşünülebilir (ileride bunlar sırasıyla  $L$  ve  $T$  olarak ifade edilmiştir). Vektörel çarpımın tanımına göre bir tork;  $\vec{r}$  vektörden  $\vec{F}$  vektörüne hareket saat yönü tersinde<sup>9</sup> bir dönüş gerektiriyorsa pozitifdir, aksi takdirde negatiftir. Böylece,  $T = |\vec{r}| \times |\vec{F}| \sin \alpha$  şeklinde yazabiliriz, burada  $\alpha$  yarıçap vektörü ile kuvvet vektörü arasındaki açıdır ve pozitif ( $\vec{r}$ 'den  $\vec{F}$ 'e dönüş saat yönü tersine ise) veya negatif olabilir. *Kuvvet kolu* olarak tanımladığımız  $h = |\vec{r}| \sin \alpha$  (şekle bakınız) ifadesinin kullanımı ile

$$T = |\vec{F}| h$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde kuvvetin teğet bileşenini  $F_t = |\vec{F}| \sin \alpha$  kullanıp

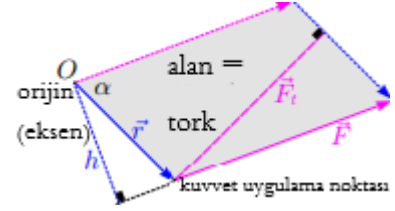
$$T = |\vec{r}| F_t$$

ifadesini elde edebiliriz. Aynı prosedür açısal momentum için de uygulanabilir:

$$L = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \alpha = h |\vec{p}| = |\vec{r}| p_t$$

<sup>9</sup>(Ç.N.) Metnin orijinalinde *saat yönüne* olarak yazılmıştır, ancak işlemler sonucunda yönün *tersi* şeklinde olduğu belirlenmiştir. Bundan dolayı orijinal metinde bir yazım hatası olduğu düşünülmektedir.

<sup>10</sup>Benzer şekilde, eğer iki cisim birbirine yüzeylerinin belirli bir alanıyla temas ediyorsa (birkaç temas noktası yerine) toplam torku temas alanı üzerinde integral alarak buluruz, ve bu kuvvetler için de her zaman bir efektif uygulanma noktası bulunabilir.



Statik disiplini *cisimlerin dengesi* üzerine çalışır, yani cismin hareketsiz olduğu bir eylemsiz referans sistemi bulunduğu. Bu durumda dengede olan bir cismin momentumu ve açısal momentumunun sabit olması gerektiği kolayca anlaşılır, dolayısıyla *cisme etki eden toplam kuvvet ve toplam tork sıfır olmalıdır*; bu ayrıca cismin hayali kısımları için de geçerlidir. Deforme olabilen (kuvvet etkisinde şeklini değiştiren) cisimlerle ilgilenen statik problemleri olsa da genelde kullanışlı olan *katı cisim*, yani çok büyük olmayan kuvvetlerin etkisinde şeklini koruyan cisim idealizasyonu vardır.

Newton'un 2. Yasası [Denk. (1)] ve statik kuvvet dengesi koşulu için kuvvetin nereden uygulandığı önemli değildir, ancak açısal momentum [Denk. (3)] ve statik tork dengesi koşulu için önemli olur. Klasik mekanikte kuvvetler, iki cismin temas noktasından etki eden *temas kuvvetleri* (çeşitli şekillerde elastisite kuvvetleri, tepki ve sürtünme kuvvetleri gibi, aşağı bakınız), ve cismin tamamına etki eden cisim kuvvetleri (yerçekimi ve elektostatik kuvvetleri gibi) olarak ikiye ayrılır. Temas kuvvetlerinin uygulanma noktası açıkça temas noktasıdır, ancak isim kuvvetleri durumunda, tork tüm cismi (cisimler sistemini) küçük parçalara (noktasal kütlelere) bölüp bu parçalara etki eden torkların integrali alınarak hesaplanabilir. Toplam cisim kuvveti (yani cismin farklı noktalarına etki eden cisim kuvvetlerinin toplamı)  $\vec{F}$  ve cisme etki eden toplam tork  $\vec{T}$  düşünüldüğünde  $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$  şeklinde bağlayan bir yarıçap vektörü  $\vec{r}$  olduğu görülebilir, yani cisim kuvvetleri cismin her noktasına uygulanırsa da net etki, sanki net kuvvet  $\vec{F}$  tek bir efektif uygulanma noktasından etki ediyormuş gibi olur; bazı durumlarda, bu efektif uygulanma noktalarını bulmanın basit kuralları vardır, mesela homojen yerçekim alanında, bu nokta kütle merkezidir<sup>10</sup>.

Kuantum mekaniğinin mikroskopik seviyesinde kuvvetlerin bu şekilde ayrılması anlamsız hale gelir, çünkü bir taraftan düşünüldüğünde cisim kuvvetlerini oluşturan ve yayan alanların kendisi de materyal gerçekliklerdir ve bu mantıkla tüm kuvvetler temas kuvvetleridir. Diğer bir taraftan ise, klasik temas kuvvetleri de mikroskopik seviyede alanlar aracılığıyla etki ettiğinden tüm kuvvetler aynı zamanda cisim kuvvetleridir. Mikroskopik derecedeki bu anlamsızlığa rağmen yine de makroskopik seviyede bahsettiğimiz usülde bir kuvvetler ayrımı bize yardımcı olur.

**Olgu 8:** (Enerji korunum yasası: Daha fazla detay için Ek 3'e bakınız.) Eğer noktasal kütle sisteminin (veya öteleme hareketi yapan katı cisim sisteminin) kinetik enerjisini

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2,$$

olarak tanımlarsak, ve çok küçük bir yer değişimi  $d\vec{r}_i$  süresince

### 2.3 Temel kuvvetler

noktasal kütlelere etki eden tüm kuvvetlerin yaptığı iş

$$dW = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

şeklinde tanımlanırsa sistemin kinetik enerji değişimi sisteme etki eden tüm kuvvetler tarafından yapılan toplam işe eşit olur:

$$dK = dW$$

burada,  $\vec{F}_i$   $i$ . noktasal kütleyle etki eden toplam kuvveti ifade eder. *Korunumlu kuvvetler* dediğimiz kuvvetler tarafından yapılan işler ise sadece sistemin ilk ve son durumlarına (yani noktasal kütlelerin konumlarına) bağlıyken bu noktasal kütlelerin izlediği yoldan bağımsızdır. Bu durum korunumlu kuvvetlerin yaptığı işin belirli bir durum fonksiyonunun  $\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots)$  azalması şeklinde gösterilebileceğini gösterir. Bu durum fonksiyonu *potansiyel enerji* olarak ifade edilir ve çok küçük yer değişimleri için  $dW_{\text{cons}} = -d\Pi^{11}$  yazabiliriz. Bundan dolayı eğer toplam mekanik enerjisi  $E = K + \Pi$  şeklinde tanımlarsak

$$dE = dW'$$

olur. Burada  $dW'$  korunumlu olmayan kuvvetlerin yaptığı işi temsil eder; eğer böyle kuvvetler yoksa  $dE = 0$ , dolayısıyla

$$E = \Pi + K = \text{sabit.} \quad (4)$$

Buraya biraz yorum gerekiyor. Öncelikle, bir cisim sisteminin momentumu onun kütle merkezinin momentumudur; ancak bir cisim sisteminin kinetik enerjisi sadece kütle merkezinin kinetik enerjisi *değildir*. Kütle merkezi referans sistemine (“KM-referansı”) göre olan kinetik enerjisi de eklenmelidir,

$$K = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{u}_i^2,$$

burada  $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_C$   $i$ . noktasal kütlelerin KM-referansında hızıdır<sup>12</sup>. Dönen katı cisimlerin kütle merkezi referansına göre kinetik enerjisinin hesaplanması daha sonra işlenecektir.

Son olarak, hıza (mesela sürtünme kuvveti) ve/veya zamana (hareket eden bir duvardan kaynaklanan tepki kuvveti gibi) bağlı olan kuvvetleri ele alalım. Bu kuvvetler korunumlu kuvvetler değildirler çünkü bu tarz kuvvetlerin bir yol üzerinde yaptığı işler cismin ne kadar hızlı gittiğine bağlıdır. Hıza her zaman dik olan hıza bağımlı kuvvetler (örnek olarak Lorentz Kuvveti ve tepki kuvveti) ise bu duruma bir istisna oluşturur. Bu tarz kuvvetler için  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt \equiv 0$  olur.

### 2.3 Temel kuvvetler

#### Kütle çekimi.

Şimdi bir kütle çekimi alanını daha detaylı bir biçimde inceleyelim. Böyle bir alanı serbest düşüş ivmesi  $\vec{g}$  ile tanımlayabiliriz. “Kinematik” kitapçığımızdan biliyoruz ki bu durumda tüm cisimler  $\vec{g}$  ivmesi ile hareket eder ve Newton’un 2. Yasası’na göre bu duruma sebep olan bir kuvvet olmalıdır:

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

Bu kuvvete *kütle çekimi (yer çekim) kuvveti* denir. Bir kütle çekimi alanında bir cisme etki eden kuvvetin cismin kütlesiyle orantılı olduğu olgusu deneysel bir bulgu olarak kabul edilir.

Kütlenin Newton’un 2. Yasası ile ortaya çıktığını ve bir cismin *eylemsizliğini*, yani cismin hızını korumaya yönelik direnci gösterdiğini, dolayısıyla bu kütleyle *eylemsizlik kütlesi* denebileceğini hatırlayalım. Burada ise kütle tamamen farklı bir yasanın etkisi altına girmiştir: Kütle çekimi cismin kütlesiyle orantılıdır. Kütle çekimi kuvvetinin cismin farklı bir özelliğinden kaynaklandığını hayal etmek kolaydır, dolayısıyla bu özelliğe *eylemsizlik kütlesinden* bağımsız olarak *kütle çekimsel kütle* diyelim. Deneyler yoluyla kütle çekimsel ivmenin her zaman eylemsizlik kütlesine eşit olduğu gösterilmiştir, dolayısıyla “kütle çekimsel” ve “eylemsizlik” sıfatlarını kullanmamıza gerek kalmaz. İşin aslı, kütle çekimsel ve eylemsizlik kütlelerinin özdeşliği fizikte çok önemli bir yere sahiptir ve genel görelilik teorisinin ana postulatı ve temel taşıdır.

Newton’un 3. Yasasından biliyoruz ki her kuvvet başka bir cisim tarafından oluşturulur: Bir  $A$  cismine etki eden kütle çekimi kuvveti başka bir  $B$  cisim tarafından oluşturulmalıdır. Aynı zamanda kütle çekimi kuvvetine kütlelerin sebep olduğunu ve kuvvetin büyüklüğünün kütleyle *orantılı* olduğunu biliyoruz. Bu durum hem  $A$  cisim hem de  $B$  cisim için geçerlidir. Dolayısıyla, kuvvet bu iki cismin kütlelerinin çarpımıyla orantılıdır:  $F = cm_A m_B$ , burada  $c$  orantı katsayısı cisimler arasındaki uzaklığa bağımlı olabilir. Deneysel olarak bulunduğunu kabul edeceğimiz sonuçlara göre  $c$ , iki cisim arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılıdır:  $c = G/r^2$ . Burada  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ ’dir ve *kütle çekimi sabiti* olarak adlandırılır. Buradan sonrasında iki kütlelerin oluşturduğu bir sistemde kuvvetin yönünün bu iki cisim sistemi için özel olan tek yönde, yani bu iki cisim birbirine bağlayan doğruya paralel olduğunu tahmin etmek kolaydır. Gerçekten de durum böyledir ve ayrıca, kütle çekimi çekici bir kuvvettir.

**Olgu 9:**  $i$ . noktasal cisme  $j$ . noktasal cisimden dolayı etki eden kütle çekim kuvveti aşağıdaki gibi verilir:

$$\vec{F}_i = \hat{r}_{ij} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}, \quad (5)$$

burada  $\hat{r}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i)/|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ ,  $i$ . cisimden  $j$ . cisime yönelen vektörün birim vektörüdür.  $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$  de bu vektörün büyüklüğüdür. Üçüncü bir kütlelerin varlığı bu yasanın geçerliliğini etkiler çünkü süperpozisyon ilkesi geçerlidir: Bir cisim üstüne etki eden toplam kütle çekim kuvveti bütün kütlelerin katkısı Denklem. (5)’e göre topladığımızda elde edilir<sup>13</sup>. Denklem (5), cisimlerin küresel simetriye sahip kütle dağılımları olduğunda da geçerliliğini sürdürür: Bu durumda,  $\vec{r}_i$  ve  $\vec{r}_j$  ilgili cisimlere karşılık gelen simetri merkezlerini gösterirler (bu simetri merkezleri de kütle merkezlerine karşılık gelir<sup>14</sup>). **Not:** Rastgele, keyfi kütle dağılımları olan cisimler için ise kütle merkezini kullanmak doğru olmayacaktır: Bu durumda kuvvet, ilgili cisimleri noktasal parçalara ayırıp integral olarak hesaplanmalıdır. Dünya’nın yer çekimi için ise,  $r_{ij}$  niceliğini Dünya’nın yarıçapına ( $R_E$ ) yaklaştırabiliriz, böylece

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = \hat{z} \frac{GM_E}{R_E^2} \approx \hat{z} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2, \quad (6)$$

<sup>11</sup> $d\Pi \equiv \Pi(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \vec{r}_2 + d\vec{r}_2, \dots) - \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$

<sup>12</sup>Ashında cismi noktasal kütlelere bölüp  $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C + \vec{v}_C)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{u}_i + \vec{v}_C)^2$  yazdık; şimdi parantezleri açıp yazabiliriz:  $\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{u}_i + \vec{v}_C)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{u}_i^2 + \vec{v}_C \sum_i m_i \vec{u}_i + \frac{1}{2} \vec{v}_C^2 \sum_i m_i$ . Burada,  $\sum_i m_i \vec{u}_i$  KM-referansına göre toplam momentumdur. Bu toplam momentum kütle merkezinin tanımına göre sıfırdır.

<sup>13</sup>Süperpozisyon ilkesi kütle çekim alanının görelî olmayan denklemlerinin lineer olmasına karşılık gelir ve deneysel olarak kanıtlanmış bir postulat gibi kabul edilebilir.

<sup>14</sup>Elektromanyetizma kitapçığında bu özellik Denklem. (5)’ten süperpozisyon ilkesi kullanılarak çıkarılacaktır.

### 2.3 Temel kuvvetler

burada  $\hat{z}$  *aşağıya* doğru yönelmiş olan birim vektörü,  $M_E$  ise Dünya'nın kütesini temsil eder.

Şuna dikkat edilmelidir ki, homojen kütle çekim alanına ait kuvvet cismin şekli ne olursa olsun efektif olarak direkt kütle merkezine etki eder. Yani, kütle çekim kuvvetinin torku şu şekilde hesaplanır:

$$\mathcal{T} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{g} m_i = \left( \sum_i \vec{r}_i m_i \right) \times \vec{g} = \vec{r}_C \times \vec{g} M,$$

burada  $M = \sum_i m_i$ .

Kütle çekim kuvveti korunumlu bir kuvettir çünkü herhangi bir çift noktasal cisim için kuvvet aralarındaki uzaklık boyuncadır ve sadece aralarındaki uzaklığa bağlıdır (bkz. Ekler 3). Homojen kütle çekim alanının sebep olduğu kütle çekim kuvvetinin ( $\vec{F} = m\vec{g}$ ) yaptığı iş  $dA = m\vec{g} \cdot d\vec{r}$  olarak ifade edilebilir, buradan  $d\Pi = -m\vec{g} \cdot d\vec{r}$  elde edilir<sup>15</sup> ve integral işlemiyle aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\Pi = -m\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

burada  $\vec{r}_0$  keyfi bir biçimde seçilmiş olan bir referans noktasını işaret eden vektördür. Şimdi enerjinin toplanabilir olduğunu aklımızda bulundurarak  $N$  cisimden oluşan bir sistem için kütle çekimsel potansiyel enerjiyi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\Pi = -\vec{g} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) = -\vec{g} \cdot (\vec{r}_C - \vec{r}_0) \sum m_i. \quad (7)$$

İki noktasal cismin enerjisi de benzer bir biçimde integral olarak hesaplanabilir; iki noktasal cisim için genelde referans alınan konfigürasyonu (yani potansiyel enerjinin sıfır alındığı durumu) iki cisim arasındaki mesafe sonsuz olacak şekilde seçmek kullanışlı olur.

Çok küçük yer değişimleri için iki cisme de etki eden kütle çekim kuvvetleri tarafından yapılan iş

$$dW = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12}$$

şeklinde verilir. (Burada,  $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , ve  $\hat{r}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -dr_{12}$  olacak şekilde hesaba kattık.) Dolayısıyla,

$$\Pi = \int_{\infty}^{r_{12}} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

olur. Eğer ikiden fazla etkileşen cisim varsa süperpozisyon ilkesiyle

$$\Pi = -G \sum_{i>j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}; \quad (8)$$

denklemini bulabiliriz. Herhangi bir çiftin etkileşim enerjisi sadece bir kere sayılması gerektiğinden toplamı  $i > j$  üzerinden aldık.

**Olgu 10:** Kütle çekimsel olarak etkileşen iki küresel simetrik cismin potansiyel enerjisi Denk. (8) olarak verilir;  $g$  büyüklüğünde aşağı yönelmiş olan homojen kütle çekim alanında,  $m$  kütlelerinin potansiyel enerji değişimi  $\Delta\Pi = g\Delta h$  şeklinde verilir. Burada  $\Delta h$  yükseklik değişimidir.

**Elastisite.** Tıpkı kütle çekim kuvveti gibi elastisite kuvvetleri de yürürken bile her adımımızda karşımıza çıkar. Mikroskopik seviyede, tüm elastisite kuvvetleri (en azından prensipte) kuantum mekaniği kullanılarak elektrostatik etkileşimler cinsinden

ifade edilebilir ise de makroskopik seviyede farklı haller alabilir. İlk olarak, kauçuk şerit ve yay gibi deforme olabilen cisimler için elastisite kuvvetini açıklayan Hooke Yasası vardır. Ayrıca tepki kuvveti ve kuru sürtünme kuvveti de elastisite kuvveti ile hiçbir alakaları yokmuş gibi gözükse de mikroskopik seviyede hepsi Hooke Yasası'ndan gelir.

**Olgu 11:** (Hooke Yasası<sup>16</sup>) Eğer deforme olabilen cismin deformasyonu çok büyük değilse, deforme olan cisim (a) deformasyon vektörünün,  $\vec{a}$ , zıttı yönde ve (b) ona bir sabit ile orantılı, yani

$$\vec{F} = -k\vec{a}. \quad (9)$$

eşitliği ile verilen bir kuvvet uygular.

Bu yasa; deformasyonun çok büyük olmadığı, sadece gerilme veya sıkışma şeklinde olduğu, bükülme<sup>17</sup> veya kesme<sup>18</sup> içermediği durumlarda lastikler, yaylar gibi bütün elastik materyaller için geçerlidir. Eğer deformasyon yönü ( $\hat{a} \equiv \vec{a}/|\vec{a}|$  birim vektörü ile verilir) sabit ise bükülme ve kesme deformasyonuna dahil olsa bile kuvvet  $|\vec{a}|$  ile doğru orantılı olur, fakat bu durumda sertlik (yani orantı katsayısı  $k$ ) de  $\hat{a}$  birim vektörüne bağlı değişir ve kuvvet, yer değişimine zıt yönde olmak zorunda değildir<sup>19</sup>.

Elastisite kuvveti korunumlu bir kuvvet olduğundan potansiyel enerji basit bir integral yardımıyla bulunabilir:  $\Pi = -\int \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int k a da = \frac{1}{2} k a^2$ .

**Olgu 12:** Olgu 9'in varsayımları doğrultusunda, elastik olarak deforme olabilen bir cismin potansiyel enerjisi şu şekilde verilir:

$$\Pi = \frac{1}{2} k a^2. \quad (10)$$

$l$  uzunluğunda, sertliği  $k$  olan kauçuk bir lastiğin uzunluğunu iki kat arttırdığımızda sertliğinin yarısı kadar azalacağı fazlasıyla açıktır. Aslında, uzamış olan lastik hayali olarak her birinin uzunluğu  $l$  olan iki lastik gibi düşünülebilir; bu durumda uzun lastiğin uçlarına aynı  $F$  kuvvetini uygularsak her iki lastik de  $x = F/k$  kadar deforme olur ve dolayısıyla toplamda lastik  $x = x + x = 2F/k$  kadar deforme olmuş olur. Sertliği de bu durumdan hareketle  $k = F/x = k/2$  olarak bulunur. Benzer şekilde lastiği iki kat kalınlaştırmak da sertliği iki katına çıkaracaktır, bu durumda da kalın lastiği iki ince paralel lastiğin birleşimi gibi düşünebiliriz. Bu durumun yaylar ve bükülme deformasyonu için geçerli olmayacağına dikkat edilmelidir: Bir yayın uzunluğunu iki katına çıkarmak aynı şekilde  $k$ 'yı yarıya azaltacaktır fakat yayı iki kat kalın bir telden yapmak yayın sertliğini iki kattan daha fazla arttırır: Aynı bükülme açısıyla kalın tel, ince telden daha fazla deforme olur. Bu paragraf sıradaki olguyla özetlenebilir.

**Olgu 13:** Elastik bir maddeden yapılmış olan  $L$  uzunluğunda, kesit alanı  $A$  olan bir lastiğin sertliği

$$k = AY/L, \quad (11)$$

burada  $Y$  maddenin *Young modülü*<sup>20</sup>.

Bu denklem sayesinde Hooke Yasası farklı bir şekilde gösterilebilir. Bu maksatla, iki farklı kavram tanımlayacağız: *ger-*

<sup>15</sup>(Ç. N.) Metnin orijinalinde  $d\Pi$  yerine  $\Pi$  yazmaktadır ancak muhtemel yazım hatasının düzeltilmiş hali bizim yazdığımız gibidir.

<sup>16</sup>R. Hooke 1660

<sup>17</sup>Aslında yayların deformasyonu bükülme içeriyor ancak bu durum için Hooke Yasası yine de geçerli kalıyor.

<sup>18</sup>(Ç. N.) İngilizce: shear.

<sup>19</sup>Bu durumlarda elastisite kuvvetinin açıklanması tensörlerin kullanımını gerektirir ve bu konu kitapçığın kapsamı dışındadır.

<sup>20</sup>L. Euler 1727, G. Riccati 1782

### 2.3 Temel kuvvetler

*ilme*, yani bağıl deformasyon  $\varepsilon = a/L$ ; ve *zor*, yani birim alandaki elastisite kuvveti  $\sigma = F/A$ . Bu tanımlar kullanılarak Hooke Yasası

$$\sigma = \varepsilon Y$$

şeklinde ifade edilebilir. Aynı zamanda deforme olmuş bir maddenin birim hacmindeki enerji yoğunluğunu gösteren *enerji yoğunluğu* kavramını tanımlayarak  $w = \Pi/(LA) = \frac{1}{2}Y\varepsilon^2$  ifadesine de ulaşabilir. Bu durumda, hangi deformasyonların Hooke Yasası'nın geçerli kalacağı ölçüde “küçük” olduğunu sorabiliriz. İlk görüşte  $\varepsilon \ll 1$  olması gerektiği düşünülebilir fakat bu çok sınırlayıcı bir gereklilik olmaz: Halihazırda çoğu esnek madde deformasyonları  $\varepsilon \sim 1$  'e ulaşmadan çok önce kırılır. *Genel olarak Hooke Yasası'nın deformasyonlar madde kırılmaya yaklaşacak kadar büyük olduğunda geçerliliğini yitirmeye başladığını söyleyebiliriz.* Maddenin esnekliğini bozacak kadar büyük olan deformasyonlara, yani kuvvet ortadan kalktığında madde ilk haline tam olarak dönemez ve maddede arta kalan deformasyonlar gözlenirse, bu deformasyonlara *plastik deformasyonlar* denir. Aynı zamanda bazı maddeler (*plastik maddeler* veya *plastik olarak deforme olabilen maddeler* olarak adlandırılırlar), parçalarına ayrılmadan önce çok geniş bir aralıktaki gerilme değerlerinde plastik deformasyona uğrayabilirler. Böyle durumlarda Hooke Yasası deformasyonun hala elastik olduğu son derece küçük gerilmeler için geçerli olur. Aynı zamanda deformasyonun çok büyük olabildiği *hiperelastik maddeler* vardır,  $\varepsilon > 1$ ; bu durumda  $\varepsilon \ll 1$  şartı Hooke Yasası'nın uygulanabilir olması için gereklidir.

Materyallerin çoğu büyük  $Y$  değerlerine sahiptirler. Bu şu anlama gelir: Bu materyallerden yapılmış çok uzun ve ince bir telimiz olmadığı sürece üzerine etki eden kuvvetler çok az ve fark edilemeyecek deformasyonlara sebep olacaktır. Bu durum genellikle tellerin, iplerin, çubukların ve katı yüzeylerin karşılaştığı durumdur. Deformasyonun geometrik etkilerinin ihmal edilebildiği bu durumlarda, öyle bir deformasyon olur ki elastisite kuvveti uygulanan *herhangi* dış kuvveti dengeler. Eğer bu bir katı cismin yüzeyiyse buna *normal (tepki) kuvveti*; tel, ip veya çubuksa buna *gerilme kuvveti* denir.

Aksi belirtilmediği sürece, gerilme kuvveti tele, ipe veya çubuğa paralel kabul edilir. İp ya da ince bir telin olduğu durumda temelinde gerçekleşen olay şudur: Herhangi bir elastik kesilme ya da bükülme zoru olması imkansızdır çünkü genellikle ip bu deformasyonlara karşı çok “yumuşaktır”, eğer dik bir dış kuvvet uygulayarak dik bir elastisite kuvveti oluşturmaya çalışırsak ip herhangi bir fark edilebilir kuvvet oluşmasına izin vermeyecek şekilde bükülecektir. Çubukta ise bu doğru değildir: Eğer dik bir dış kuvvet uygularsak çubuk bükülmeye karşı çıkar ve dik bir gerilme kuvveti oluşturur. Yine de, eğer çubuğa uygulanan dış kuvvetler çubuğa paralel ise, Newton'un 3. Yasası'na göre gerilme kuvveti çubuğa paralel olacaktır.

Bahsedilen cisimler (ip, çubuk vs.) gerilmiş durumunda ise, cismi kafamızda iki parçaya ayırabiliriz. Sonrasında, ayırım noktası  $P$ 'de iki parça belirli bir elastisite kuvveti ile etk-

ileşir. Kuvvetin yönü, cismin hangi parçasının incelendiğine göre değişir; fakat Newton'un 3. Yasası'na göre büyüklüğü aynı kalır. Hayali olarak ayrılmış bu iki parçanın  $P$  noktasında birbirleriyle etkileşim kuvvetleri, ipin o noktadaki durumunu belirtir ve buna *gerilme* denir. Böylece ipin ucuna uygulanan kuvvet  $\vec{F}$  ve ipin herhangi bir noktası için tanımlanan ve durumunu belirten gerilmeyi ( $T$ ) birbirinden ayırmış oluruz. Eğer dış kuvvetler denge durumundaki bir ipin sadece uçlarına uygulanırsa, hayali olarak ayrılmış her bir parçada kuvvet dengesi sağlanması gerektiği için  $|\vec{F}| = T$ .

**Olgu 14:** Gerilme; ip, çubuk vs. gibi doğrusal yapı malzemesi olan cisimlerde<sup>21</sup> oluşan elastisite kuvvetidir. Böyle bir esnemeyen cisim<sup>22</sup> için eğer cisim çekilirse (eğer çubuksa itilebilir de) gerilme kuvveti, dış kuvvetin esnemeye sebep olmasını önleyecek şekilde oluşur. Eğer ipin ya da çubuğun kütlesi ihmal edilebilir ise gerilme cisim boyunca sabit kalır. Serbestçe bükülebilen bir ipten bir  $P$  noktasındaki gerilme kuvveti,  $P$  noktasından geçen teğet doğrusu paraleldir.

**Olgu 15:** Tepki kuvveti; bir katı (deforme olamayan, rijit<sup>23</sup>) cismin, yüzeyine temas eden farklı bir cisme etki ettiği elastisite kuvvetinin yüzeye dik bileşenidir. Bu kuvvet kendini dış kuvvetlere göre ayarlayarak rijit cismin deforme olmasını önler.

Ayrıca, eğer uygulanan dış kuvvet katı (rijit) cismin yüzeyine dik değilse, Newton'un 3. Yasası'ndan, elastisite kuvvetinin hem yüzeye dik hem de teğet (yüzeye paralel) bileşenleri olacaktır. Paralel olan kuvvet, kendini *sürtünme kuvveti* olarak iki cismin temas noktalarında gösterir. Daha doğrusu sürtünme kuvveti, bir cisim diğer bir cismi kaydırmaya çalışırken cisimlerin moleküllerinin etkileşmesi sonucu iki cismin temas noktasında oluşan kuvvettir. Yüzey molekülleri, buldukları cisim içerisinde elastisite kuvvetinden dolayı yerlerini koruyabilirler. Bu elastisite kuvvetlerine cisimlerin kesme deformasyonu (genellikle ihmal edilebilecek kadar küçük) sebep olur.

Katı cisimler söz konusu olduğunda, eğer teğet olan dış kuvvetler dik olanlarla kıyaslandığında çok büyük değilse cisimler kaymaz ve sürtünme kuvveti kendini teğet olan kuvvetleri dengeleyecek şekilde ayarlar. Bu sürtünme kuvveti *statik sürtünme kuvveti* olarak adlandırılır.

**Olgu 16:** (Amonton Yasası.) İki cismin temas ettiği yüzeydeki maksimum statik sürtünme kuvveti  $F_{\max} = \mu_s N$  ifadesiyle verilir, burada  $N$  yüzeydeki yüzeye dik tepki kuvveti ve  $\mu_s$  de temas eden iki cisme bağlı bir sabittir.  $\mu_s$  sabitinin bir diğer ismi de *statik sürtünme katsayısı*dır, ve ortam sıcaklığı, nemi vs. gibi özelliklere bağlı olabilir. Dolayısıyla,  $F_{\max}$  değeri temas yüzeyinin büyüklüğünden bağımsızdır.

**Olgu 17:** (Coulomb'un sürtünme yasası.) Birbirlerine göre hareket ettiğinde, bu cisimlerin temas alanında sürtünme

<sup>21</sup>Üç boyutlu elastik cisimlerin sıkışmasını incelenirken gerilme yerine zor kavramı kullanılır; bu durumda tanım matematiksel olarak çok daha karmaşıktır, örneğin zor bir *tensördür*.

<sup>22</sup>Daha açık olarak, Young modülü  $Y$  çok büyük olan bir maddeden yapılmış olan bir cisim.

<sup>23</sup>(Ç.N.) Metnin orijinalinde *rigid body* ve *solid body* terimleri kullanılmaktadır. Türkçede ikisi için de genel kullanım *katı cisim* yönündedir. Bu nedenle anlam karmaşıklıkları oluşmaktadır. Bu karmaşıklığı çözmek adına, sırası ile, *rijit cisim* ve *katı cisim* terimleri kullanılacaktır. Aralarındaki farkı açıklamak gerekirse: Rijit cisim, herhangi bir süreçte deformasyonu olmayan cisime denir, yani, young modülü sonsuz cisimlere rijit cisim denir. Bu durum bir rijit cisim içinde seçilmiş iki noktanın arasındaki mesafenin değişmediği anlamına gelir. Katı cisimler deformasyona uğrarlar bu nedenle katı cisimler açısından ise rijitlik özelliği bir ideal durum özelliğidir.

kuvveti  $F = \mu_k N$  şeklinde verilir. Burada  $N$  temas alanındaki tepki kuvvetidir,  $\mu_k$  ise *kinetik sürtünme katsayısı* olarak adlandırılan, temas eden iki cisme bağlı olan bir sabittir; kayma hızına da bağlı olsa da bu bağıllık çok düşük olduğundan genellikle gözardı edilir.

Olimpiyat problemlerinde çoğunlukla  $\mu_s = \mu_k$  olarak varsayılır, fakat bazen  $\mu_s > \mu_k$  olacak şekilde farklı alınır.

Sürtünme yasaları çok eski olmasına rağmen <sup>24</sup>, onlara mikroskopik (moleküler) dinamikten ulaşmak zordur (Bununla ilgili hala yayınlanan makaleler var, bkz. M.H. Müser et al., Phys. Rev. Lett. 86, 1295 (2000), ve O.M. Braun et al., Phys. Rev. Lett. 110, 085503 ).

### 3 STATİK

Statik problemlerini çözerken her zaman klasik "kaba kuvvet" yöntemini kullanabiliriz. (1) ve (3) numaralı denklemler bize denge halindeki her cisim için  $\vec{F} = 0$  ve  $\vec{T} = 0$  ifadelerinin geçerli olduğunu söyler. Demek ki her katı cisim için bir kuvvet dengesi bir de tork dengesi koşulu yazılabilir. Klasik prosedürü izlersek bu denklemlerin  $x$ ,  $y$  ve  $z$  eksenlerine izdüşümünü aldığımızda elimizde toplam 6 denklem bulunur (ön kabulümüz tabi ki sistemi 3 boyutlu geometride incelediğimizdir) ve eğer etkileşimde bulunan  $N$  cisim varsa toplam denklem sayısı  $6N$ 'dir. Doğru biçimde oluşturulmuş bir problemde de bu  $6N$  cebirsel denklemi çözebilmek için  $6N$  tane de parametreyi bilmemiz gerekir. Bu prosedür kulağa hoş gelir ama bu kadar fazla denklemi çözmek gerçekten çok zor olabilir. 2 boyutlu geometri olduğu durumda ise elimizdeki denklem sayısı yarıya düşer (bir cisim için kuvvet denklemi sayısı ikiye, tork denklemi sayısı ise tüm kuvvetlerin torku düzleme dik olacağı için bire düşer). Ama yine de, iki cisim için bile 6 tane denklem çözmemiz gerekir.

Ne şanslıyız ki denklem sayısını daha aza indirmek için yapabileceğimiz bir çok *hile*<sup>25</sup> var! Bunlar genelde şu fikre dayanır:

**Fikir 1:** Olabildiğince fazla sayıda kuvvet izdüşümünü sıfır yapabilecek koordinat eksenleri seçimleri yapılmalıdır. Özellikle *bilmediğimiz ve ilgilenmediğimiz* kuvvetlerin izdüşümlerini sıfırlamak, soru çözümünde fayda sağlar.

Bu kuvvetlere örnek olarak iki cisim arasındaki tepki kuvvetini veya bir ip ya da çubuktaki gerilme kuvvetini verebiliriz. Olabildiğince fazla kuvveti sıfırlamak için şu iki şeyi not etmekte fayda var: *a)* seçilen eksenler birbirine dik olmak zorunda değildir, *b)* sistem eğer birden fazla cisimden oluşuyorsa her cisim için farklı eksen seçimleri yapılabilir.

**Fikir 2:** Tork denklemini oluştururken olabildiğince fazla kuvvet (moment) kolunu sıfırlayan noktaya göre tork alınmalıdır. Ayrıca, kuvvetteki gibi torkta da *ilgilenmediğimiz kuvvetlerin* torkunu sıfırlamak en mantıklıdır.

Örneğin, tork aldığımız noktayı iki cismin temas noktası olarak seçersek bu cisimler arasındaki sürtünme kuvveti ve tepki kuvvetinin torku sıfır olur.

Yukarıda bahsettiğimiz üzere, *iki boyutlu* bir sistem için; cisim başına iki tane kuvvet denklemi ( $x$  ve  $y$  bileşenlerinden)

### 3. STATİK

ve bir tane de tork denklemi yazabiliriz. Denklem sayısını arttırmak istersek de kuvvet dengesi için ikiden fazla izdüşümü inceleyebilir, veya tork dengesi için ilk aldığımız noktadan farklı noktalara göre de tork alabiliriz. Ancak, şöyle bir sıkıntı bulunmaktadır:

**Olgu 18:** *Kuvvet ve tork dengesini kullanarak elde edilebilecek doğrusal olarak bağımsız denklem sayısı en fazla cismin serbestlik derecesi kadar olabilir (iki boyutta  $x$  ve  $y$  eksenleri boyunca doğrusal hareket ile mevcut düzlemde dönme olmak üzere bu sayı üç, üç boyutta ise bu sayı altıdır.*

Dolayısıyla, iki boyutta çalışırken eğer ikişer tane kuvvet ve tork dengesi yazarsak bu toplam dört denklemden birisi her zaman diğer üçünden çıkarılabilen, fazlalık bir denklem olacaktır.

İki boyutlu uzayda çalışırken Denklem (1) ve (3) bize bir tane tork ve iki tane kuvvet denklemi kullanmamız gerektiğini söylüyor ancak kuvvet denklemleri, rahatlıkla tork denklemleriyle "takas" edilebilir. Yani, alışık olduğumuz şekilde iki kuvvet ve bir tork denklemi kullanmak yerine tek bir kuvvet denklemi kullanıp referans noktaları birbirinden farklı iki tork denklemi, hatta referans noktaları birbiriyle doğrusal olmayan üç tork denklemi kullanabiliriz. İki tane tork dengesi durumumuz olsun,  $\sum_i \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = 0$  ve  $\sum_i \vec{O}'P_i \times \vec{F}_i = 0$ ; burada  $P_i$ ,  $\vec{F}_i$  kuvvetinin uygulandığı noktadır. Bir denklemi diğerinden çıkardığımızda bize  $OO'$  doğru parçasının dikmesi boyunca olan kuvvet iz düşümlerinin denge koşullarını ifade eden  $\sum_i \vec{OO}' \times \vec{F}_i = \vec{OO}' \times \sum_i \vec{F}_i = 0$  denklemini elde ederiz. Denklem sistemimizde en az bir tork denkleminin kalması gerektiğini vurgulamak uygun olur: Kuvvet denklemlerinin tork denklemleri ile "takas" edilebilmesinin sebebi  $O$  etrafında  $d\varphi$  kadar bir dönmenin ardından  $O'$  etrafında  $-d\varphi$  kadar bir dönme hareketinin  $|OO'|d\varphi$  doğru parçasının öteleme hareketiyle sonuçlanıyor oluşudur, fakat dönme hareketi ile sonuçlanabilecek bir öteleme hareket dizisi yoktur.

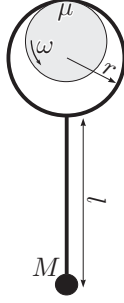
**Fikir 3:** Tork denge denklemleri genelde daha kullanışlıdır çünkü kuvvet denge durumlarında, eğer paralel kuvvetler yoksa, yalnızca bir kuvveti (kuvvet denge durumunu ona dik olan yönde yazarak) elimine edebiliyorken tork dengesini kullanırken paralel olmayan iki kuvvet boyunca çizilen doğruların kesiştiği noktayı referans olarak denkleminizden iki kuvveti birden elimine edebiliriz.

**pr 1.** Hafif bir telin bir ucu  $r$  yarıçaplı bir çember olacak şekilde kıvrılıyor, diğer ucuna ise  $M$  kütleli bir top bağlanıyor. Telin düz kısmının uzunluğu  $l$ . Oluşan sarkaç ucundaki çember sayesinde dönen bir mile asılıyor. Mil ile çember arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$  ise dikey ile çubuğun denge konumu arasındaki açıyı bulun.

<sup>24</sup>Sürtünme yasaları L. da Vinci 1493, G. Amontons 1699, ve C.A. Coulomb 1785 tarafından geliştirilmiştir.

<sup>25</sup>(Ç. N.) İngilizce: trick. Bilimsel yazımlarda sıklıkla kullanılan bu ifade, çözüm için zekice bulunmuş kısa yöntemleri ve uyanıklıkları niteler.

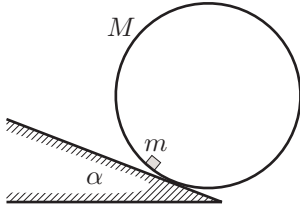




Bu soruyu çözmeye çalışan insanların çoğu kullanışlı ve doğru bir çizim yapmakta güçlük çektiğinden bu soru zor olarak sınıflandırıldı. Doğru bir çizim yapmamızı sağlayacak şey Fikir 2'yi göz önünde bulundurmak olacaktır. Bize yardımcı olacak bir diğer şey ise

**Olgu 19:** Eğimli bir yüzeyde; eğim açısı  $\alpha$ ,  $\tan \alpha = \mu$  koşulunu sağladığında kayma başlar.

**pr 2.**  $M$  kütleli bir silindir, eğim açısı  $\alpha$  olan bir eğik düzlemin üzerinde durmaktadır. İçine  $m$  kütleli küçük bir blok yerleştiriliyor. Blok ile silindir arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ , eğik düzlem ise kaygan değil. Silindirin hareketsiz kalabilmesi için eğim açısının,  $\alpha$ , alabileceği en büyük değer nedir? Blok, silindirin yarıçapına kıyasla çok küçüktür.

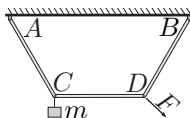


Burada tekrardan Olgu 19'u ve Fikir 2'yi kullanabiliriz. Bunlara ek olarak:

**Fikir 4:** Bazı durumlarda birden çok cisimden oluşan sistemleri bir bütünlük gibi düşünüp bütün sisteme ait kuvvet ve tork denklemlerini yazmak kullanışlı olur.

Bu durumda sisteme etki eden net kuvvet (veya tork), sistemin bileşenlerine etki eden dış kuvvetlerin (veya torkların) toplamıdır. Sistemin çeşitli yerlerindeki iç kuvvetlerle (veya tork) uğraşmak zorunda olmadığımızdan (Newton'un 3. Yasası ile açıklanabileceği üzere birbirlerini götürüyorlar) hesaplamamız kolaylaştı. Son soruda bloğu ve silindiri tek bir sistemmiş gibi ele almak kullanışlıdır.

**pr 3.** Özdeş üç çubuk birbirine menteşeler ile bağlanmıştır ve en dıştaki uçlar da  $A$  ve  $B$  noktalarından tavana asılmıştır. Bu iki noktanın arasındaki mesafe bir çubuğun uzunluğunun 2 katıdır.  $m$  kütleli bir cisim  $C$  noktasından asılmıştır.  $CD$  çubuğu yatay olacak şekilde sistemi dengede tutmak için  $D$  noktasına en az hangi büyüklükte bir kuvvet uygulanması gerekmektedir?



Aynı şekilde Fikir 2'yi kullanabiliriz. Altındaki Olgu da yardımcı olacaktır:

### 3. STATİK

**Olgu 20:** Eğer kuvvetler bir çubuğun sadece iki uç noktasına uygulanmışsa ve çubuğun ucu/uçları sabit biçimde tutturulmamış ise (çubuk desteklerinin üstünde serbestçe duruyor ya da ipe veya menteşeye bağlıysa) çubuktaki gerilme kuvveti çubuk boyuncadır.

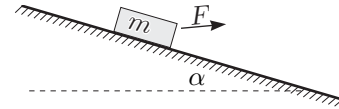
Tabii ki iki uçta da uygulanan dış kuvvet, diğer uca göre olan torku sıfır olması gerektiği için çubuk boyunca olmalıdır. Dahası, Newton'un 3. Yasası'na göre dış kuvvet çubuk tarafından aktarılan gerilme kuvveti  $\vec{T}$ 'ye eşit ve zıt yönde olmalıdır ki  $\vec{F} = -\vec{T}$  olsun.

Bazı fikirler tümüyle evrensel, özellikle de aşağıdaki Kinematik fikri gibi evrensel olanları:

**Fikir K-2:** bazı maksimum ya da minimum noktalarını türev kullanmadan bulmak daha kolaydır,

örneğin, bir noktadan bir düzleme olan en kısa yol düzlemeldir.

**pr 4.** Eğim açısı  $\alpha$  olan bir eğik düzlemde eğer sürtünme katsayısı  $\mu$  ise  $m$  kütleli bir cismi oynatmak için gereken minimum kuvvet nedir? a)  $\alpha = 0$  ve b)  $0 < \alpha < \arctan \mu$  olduğu durumları inceleyiniz.



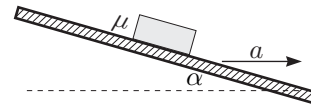
**Fikir 5:** Bazen kuvvet dengesi, kuvvetlerin eksnelere göre izdüşümleri alınmaksızın vektörel olarak kurulabilir.

Olgu 19'un, ya da aşağıdaki genelleştirilmiş halinin, bu soru için yararlı olduğu ortaya çıkar:

**Fikir 6:** Eğer bir cisim kaymanın eşiğindeyse (ya da kayıyor), sürtünme kuvveti ve tepki kuvvetinin toplamı ile yüzey normali arasındaki açı  $\arctan \mu$ 'dur.

Bu fikir pek sık kullanılır, mesela sıradaki örnekte olduğu gibi.

**pr 5.** Bir blok, eğim açısı  $\alpha$  olan bir düzlemde hareketsiz olarak durmaktadır. Düzlem, yüzey normali ile aynı dikey düzlemde olan yatay  $a$  ivmesiyle hareket ediyor. Bloğun düzlem üzerinde hareketsiz kalmasını sağlayan sürtünme katsayısı  $\mu$  değerlerini bulunuz.



Burada evrensel olan şu fikirden faydalanıyoruz:

**Fikir 7:** Çoğu problem, öteleme hareketi yapan (ötelenen) eylemli referans sistemlerinde çok kolay olur.

Biraz açıklayalım: Ötelenen eylemli referans sistemlerinde her bir cisme ayrıca *eylemsizlik kuvveti*  $-m\vec{a}$  etki ediyormuş gibi düşünüp Newton'un yasalarını yeniden tanımlayabiliriz. Burada,  $\vec{a}$  referans sisteminin ivmesi ve  $m$  de belirlenen cismin kütesidir. Aslında, kinematikte öğrendiğimiz üzere referans sisteminin öteleme hareketinde ivmeler eklenebilir, bkz. Fikir K-19. Yani, hareketli referans sisteminde tüm cisimler sanki kütleli  $m$  olan bir cisme etki eden  $\vec{F} = -m\vec{a}$  kuvveti varmışçasına ayrıca bir  $-\vec{a}$  ivmesi kazanır.

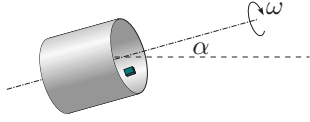
### 3. STATİK

Ayrıca, eylemsizlik ve kütle arasındaki denklikten dolayı (bkz. “Kütle çekimi”, *Bölüm 2.3*) eylemsizlik kuvveti kütle çekimine benzer<sup>26</sup>. Bu sebeple,

**Fikir 8:** Kütle çekim kuvveti ve eylemsizlik kuvvetlerinin net toplamı, efektif bir kütle çekim kuvveti olarak kullanılabilir.

fikrini kullanabiliriz.

**pr 6.** Yarıçapı  $R$  olan bir silindir  $\omega$  açısal hızıyla eksenini etrafında dönmektedir. Silindirin iç yüzeyinde küçük bir blok bulunmaktadır; blok ile silindir arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$  olarak bilinmektedir. Bloğun kaymaması (silindire göre hareketsiz kalması) için gereken  $\omega$  değerini bulunuz. Şu iki durumu gözönüne alınız: (a) silindirin eksenini yatay; (b) silindirin eksenini yatayla  $\alpha$  açısı yapacak şekilde eğilmiş.



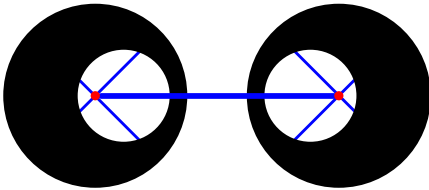
**Fikir 9:** Dönen bir referans sistemi, problem çözümü için merkezkaç kuvveti  $m\omega^2\vec{R}$  ( $\omega$  referans sisteminin açısal hızı ve  $R$  de dönme ekseninden soruda belirtilen noktaya çekilen vektör) ve Coriolis kuvveti eklenerek kullanılabilir. Coriolis kuvveti; (a) cismin dönen referans sisteminde hareketsiz kaldığı veya dönme eksenine paralel olarak hareket ettiği durumlar, ve (b) enerjinin korunumu (bu durumda Coriolis kuvveti hızla dik olduğundan toplam enerjiyi değiştirmez) için önemsizdir.

Uyarı: Bu fikirde dönme eksenini gerçek olmalıdır, anlık dönme eksenini olmamalıdır. Coriolis kuvveti ve merkezkaç kuvveti için ifadeler Ek 4’te elde edilmiştir.

Problem 6 için, Fikir K-2b ve Fikir 6’yı hatırlayalım; (b) bölümü için ise şu fikri de hatırlayalım,

**Fikir K-11:** Üç boyutlu geometri söz konusu olduğunda, iki boyutlu kesitlerle çalışmakta fayda vardır. Bu özellikle problemdeki ilgilendiğimiz objeler (mesela, kuvvet vektörleri) tek bir kesitte bulunduğu kullanışlıdır. Kesitlerin yönleri ve konumları zamanla değişebilir.

**pr 7.** Bir el arabasının iki silindirik tekerleği kütsüz jant telleri ve sürtünmesiz bir eksen kullanılarak kütsüz bir çubukla şekildeki gibi bağlanmıştır. Her bir tekerlek  $R$  yarıçaplı homojen bir diskler ve her birinin üzerinde merkezlerinden  $R/3$  uzaklıktaki bir noktayı merkez alacak şekilde  $R/2$  yarıçaplı silindirik bir boşluk oluşturulmuştur. Tekerlekler bu boşluklar birbirlerine doğru bakacak şekilde döndürülmüş ve el arabası yatay zemin üzerinde hareket etmeye başlamıştır. Hangi kritik  $v$  hızında tekerlekler zıplamaya başlar?



Bu problem bir öncekine az çok benzerdir ve önceki fikirler kullanılarak çözülebilir. Aslında süreci el arabasıyla bir-

<sup>26</sup>Denklikleri genel görelilik teorisinin önemli bir parçasıdır (tam olarak, herhangi bir yerel ölçümde eylemsizlik kuvveti ve yerçekim kuvvetinin ayırt edilemez olduğunu varsayar).

<sup>27</sup>(Ç. N.) Orijinal metinde (d) bölümü yazmaktadır ancak açıklamanın devamından bunun bir yazım hatası olduğu kanaatindeyiz.

likte hareket eden bir referans sisteminde ele alırsak Newton’un 2. Yasası’nı tekerleğin kütle merkezinin merkezci ivmesi için uygulayabiliriz. Fakat, çözümü için yine de birkaç farklı fikir kullanalım.

**Fikir 10:** Kütle çekimi kuvvetinin (ya da cismin kütleyle orantılı başka bir hayali kuvvetin) cismin kütle merkezine etki ettiği yalnızca şu durumlarda kabul edilebilir:

- (a) etkin (efektif) kütle çekimi alanı homojendir;
- (b) cismin kütle dağılımı küresel simetriye sahiptir;
- (c) etkin kütle çekimi alanı konum vektörüyle orantılıdır, örneğin hareketin dönme eksenine dik olan düzleme sabitlendiği bir durumda merkezkaç kuvveti.

Diğer tüm durumlarda tesadüfen kütle çekimi yine kütle merkezine etki edebilse de genel olarak öyle olmaz. Mesela, Coriolis kuvvetinin kütle merkezine etki ettiği ancak cisim dönen referans sisteminde dönmüyorsa kabul edilebilir.

Bu Fikrin (a) bölümü, Fikir 9 sonrasındaki paragrafta motive edilmiştir, ancak öne sürülen bu (b) ve (c) bölümleri elektromanyetizma kitapçığında daha detaylı bir biçimde incelenecektir (elektrostatik ve görelilik olmayan kütle çekimi alanları da benzer yasalara tabiidir.). (c) bölümünün<sup>27</sup> doğru olduğunu göstermek için kütle çekimi tarafından oluşturulan toplam kuvvet ve torkun büyüklüklerinin cisim yerine cismin kütle merkezinin olduğu noktada noktasal bir cisim olsaydı da aynı olacağını göstermemiz gerekiyor. Bu sebeple, çekim (itim) merkezini orijin kabul edelim ve  $\vec{g} = k\vec{r}$  olduğunu varsayarak toplam torku  $\vec{T} = \vec{r}_i \sum k m_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i \equiv 0$  şeklinde ifade edelim; aynı sonuç kütle çekimi kuvvetinin oluşturduğu torkun kolu sıfır olduğundan kütle merkezi için de elde edilirdi. Dahası, toplam kuvveti de  $\vec{F} = \sum k m_i \vec{r}_i = kM(\sum m_i \vec{r}_i / M) = kM\vec{r}_C$  şeklinde ifade edelim; burada  $M = \sum m_i$  cismin toplam külesidir.

Burada kullanılacak iki fikir daha vardır,

**Fikir 11:** Daha simetrik bir konfigürasyon elde etmek veya durumu başka bir şekilde basitleştirmek için bazen bir niceliğinin değeri sıfır olan bir bölgeyi aynı niceliği zıt işaretlere sahip olan iki farklı bölgenin süperpozisyonu olarak göstermek yararlı olur.

Bu nicelik kütle yoğunluğu (bu durumdaki gibi), yük veya akım yoğunluğu, veya bir kuvvet alanı vb. olabilir. Genelde bu hile sıradaki fikirle beraber kullanılır:

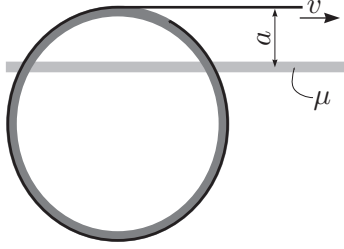
**Fikir 12:** Problemi olabildiğince simetrik yapın.

Bu amaca Fikir 11’i kullanarak veya uygun referans sistemleri kullanılarak ulaşılabilir. Ayrıca, çözüm sürecini bazı aşamalara (bazı aşamalar simetrik geometri kullanılabilir) bölmek gibi yöntemler de kullanılabilir.

**pr 8.** Kütle  $m$  ve yarıçapı  $R$  olan silindirik bir kabuk yüzeyin tamamı ile temas eden yatay bir düzlem üzerinde, tabanı üstünde durmaktadır. Bir ip bu silindire sarılır ve ipin serbest ucundan ip, düzleme paralel olacak şekilde  $V$  hızıyla çekilir. Silindirin hızını şu iki durum için bulunuz: (a) yüzey ile silindir arasındaki sürtünme katsayısı kalınlığı kısa bir şerit (silindirin yarıçapından çok daha küçük) haricindeki her yerde

### 3. STATİK

sıfır, şeritte ise  $\mu$  değerindedir. Şerit düzleme paraleldir ve düzlemler arasındaki mesafe  $a < 2R$  (şekilde düzleme yukarıdan aşağı bakılmıştır) şeklinde verilir. (b) sürtünme katsayısı her yerde aynı ve  $\mu$  değerindedir. *İpucu:* Rijit cisimlerin herhangi bir düzlemsel hareketi ani (anlık) bir dönme merkezi etrafında olan dönme hareketi gibi görülebilir. Yani, belirli bir anda cismin her bir noktasının hız vektörü, ani dönme merkezi sanki gerçek dönme merkeziymiş gibi düşünüldüğünde ortaya çıkan durumla aynıdır.



Bu biraz zor bir problem olduğundan,

**Fikir 13:** Eğer bir cismin sabit hızla hareket etmesi gerekiyorsa, bu problem statik problemdir.

fikrini kullanmak faydalı olur. Ayrıca Fikir 1 ve 2'yi hatırlayalım. Sonrasında sonucu olan şu fikre dikkat edelim:

**Fikir 14:** Eğer dengede olan bir cisme üç ayrı noktadan üç farklı kuvvet uygulanıyorsa bu kuvvetlerin etki doğruları bir noktada kesişir. (Kesişim noktası sonsuzda da olabilir — çizgiler sonsuzda kesişiyor demek çizgiler paralel demek olur). Eğer sadece iki etki noktası varsa, karşılık gelen doğrular kesişir.

Bu kullanışlı fikir, iki kuvvetin etki doğrularının kesiştiği noktaya göre tork dengesi yazınca ortaya çıkar (üç kuvvet kolunun ikisinin ve toplam torkun sıfır olması, üçüncü kuvvet kolunun da sıfır olması gerektiğini beraberinde getirir).

Başka bir yararlı olgu ise şudur:

**Olgu 21:** Bir noktaya etki eden sürtünme kuvveti her zaman, ilgili noktanın sürtünme kuvvetine neden olan cismin referans sistemindeki hızının zıttı yönündedir.

Zaman zaman bazı matematiksel hileler de kullanışlı olabilir; burada çevre açıların özellikleri ve spesifik olarak Thales teoremi önemlidir (geometri teoremleri arasında bu teorem muhtemelen fizik problemleri çözmede en kullanışlı olanıdır):

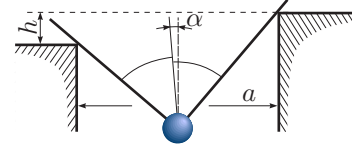
**Olgu 22:** Bir yarı çemberin çapını, çemberin yayının üzerindeki herhangi başka bir nokta ile birleştirdiğimizde bir dik üçgen oluşur. Çemberin yayının üzerindeki köşenin açısı dik açıdır. (Genel olarak, çember üzerindeki bir çevre açısının radyan biriminden büyüklüğü, o açının gördüğü yay uzunluğu ve çemberin yarıçapının oranlarının yarısına eşittir.).

Çevre açılarının bu özelliği sıradaki basit fikirle birlikte bir sonraki problem için de kullanışlıdır:

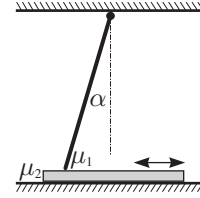
**Fikir 15:** Kararlı denge durumundaki bir cismin potansiyel enerjisi minimumdur.

**pr 9.** Hafif bir tel dik açı oluşturacak şekilde bükülmüş ve sonrasında bükülme noktasına ağır bir top bağlanmıştır. Tel aralarındaki dikey uzaklık  $h$ , yatay uzaklık ise  $a$  olan iki

destek noktasının üzerine yerleştirilmiştir. Denge durumunda telin konumunu bulunuz. Konumu dik açının açı ortayı ve dikey arasındaki açı cinsinden ifade ediniz. Tel ve destek noktaları arasındaki sürtünmeyi ihmal ediniz; destek noktalarında hareketin yalnızca tel ve geometrik şeklin oluşturduğu düzlemde gerçekleşmesini sağlayacak küçük oluklar vardır.



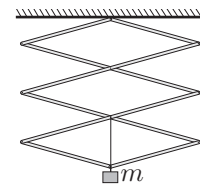
**pr 10.**  $l$  uzunluğundaki bir çubuk  $h < l$  yüksekliğindeki bir tavana asılmıştır. Zeminde bir levha çekilmektedir. Çubuğun amacı levhanın bir yönde hareket etmesine izin vermekle beraber zıt yöndeki hareketini durdurmaktadır. İşini yapabilmesi için hangi koşulun sağlanması gerekir? Çubukla levha arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu_1$ , zeminle levha arasındaki sürtünme katsayısı ise  $\mu_2$  'dir.



Olgu 6 'yı hatırlayalım: Eğer iki cisim arasındaki bağıl kaymanın yönü biliniyorsa sürtünme ve tepki kuvveti vektörlerinin toplamının yönünü yalnızca sürtünme katsayısını bilerek belirleyebiliriz. Eğer bir kuvvet cisimlerden birini tepki kuvvetini büyütecek şekilde hareket ettiriyorsa cisimler sıkışır: Cisimleri çekmek için uyguladığımız kuvvet büyüdükçe onları dengeleyen sürtünme ve tepki kuvvetleri de aynı şekilde büyür.

**Fikir 16:** Sürtünme hareketi engelleyebilir. Böyle bir durumda, sürtünme kuvveti, tepki kuvveti ve sistemi hareket ettirmek için uygulanan dış kuvvetler haricindeki tüm kuvvetler ihmal edilebilir çünkü kütle çekimsel (ve onun gibi olan diğer) kuvvetler sabittir fakat bahsedilen kuvvetler biz daha çok ittikçe veya çektikçe büyürler.

**pr 11.** Dört uzun çubuk ve bunların yarısı uzunluğundaki dört diğer çubuk üç özdeş eşkenar dörtgen oluşturacak şekilde birbirlerine geçirilmişlerdir. Bu mekanizma bir ucundan tavana asılmış diğer ucuna ise  $m$  kütleli bir ağırlık bağlanmıştır. Kütlelinin asıldığı eklem ile onun üstündeki eklem birbirlerine bir ip ile bağlanmıştır. İpteki gerilmeyi bulunuz.



Bu problem *sanal yer değiştirme yöntemi* ile en kolay şekilde çözülür.

**Yöntem 1:** Gerilimi aranan ipin ya da çubuğun uzunluğunu sonsuz küçük büyüklükte  $\Delta x$  kadar değiştirebildiğimizi hayal edin. Yapılan iş  $T\Delta x$ 'i potansiyel enerjideki değişim  $\Delta\Pi$ 'le eşitleyerek şunu elde ederiz:  $T = \Delta\Pi/\Delta x$ .

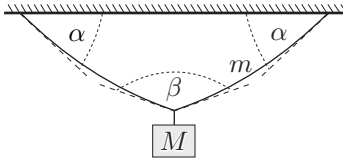
### 3. STATİK

**Genelleme:** Eğer sisteme etki ettiğini varsaydığımız dış kuvvetler  $\vec{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ve onların uygulandığı noktaların yer değişimleri  $\delta\vec{x}_i$  ise ve aynı zamanda ilgilenilen ip ya da çubuğun uzaması  $\Delta x$  ise o zaman

$$T = (\Delta\Pi - \sum_i \delta\vec{x}_i \cdot \vec{F}_i) / \Delta x.$$

Ayrıca bu yöntem gerilme dışındaki başka kuvvetlerin bulunmasında da kullanılabilir (örneğin makaralarla ilgili problemlerde): Bilinmeyen kuvveti uygulandığı noktadan hayali olarak kaydırarak bu kuvvetin hayali kaydırma üzerindeki izdüşümü bulunabilir.

**pr 12.**  $m$  kütleli bir ip, ortasına bağlanmış  $M$  kütlesi ile iki ucundan tavana asılmıştır. İpin iki ucunda da ipe teğet olan doğru ile tavan arasında  $\alpha$  açısı vardır.  $M$  kütleli olduğu noktada ipe teğet olan iki doğru arasındaki açı  $\beta$ 'nin değeri nedir?



Olgu 14'ü hatırlayalım: Serbestçe sarkan bir ipteki gerilme ipe teğet olacak şekilde yönelmiştir. Bunun yanı sıra, aşağıdaki fikri uygulayabiliriz:

**Fikir 17:** Sarkan ipler, çubuklar vb. için ayrı olarak ipin bir parçasını kafada ayırmak ve bu parçaya etki eden kuvvetlerin dengesini bileşenlere ayırarak incelemek faydalı olacaktır.

Aslında, bu durumda yukarıdaki fikrin tamamına değil onun sonucuna ihtiyaç duyulur:

**Olgu 23:** Kütleli bir ipteki gerilme kuvvetinin yatay bileşeni sabittir.

Fikir 17'yi ve Olgu 23'ü kullanarak sıradaki yaklaşımın geçerli olduğunu göstermek nispeten daha kolaydır.

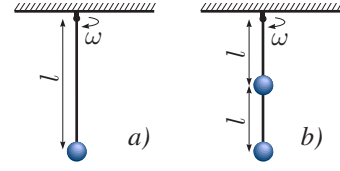
**Fikir 18:** Eğer bir ipin sarkan kısmının ağırlığı gerilmesinden çok daha küçükse ipin eğriliği azdır ve kütleli yatay dağılımı yaklaşık sabit kabul edilebilir.

Bu bize ipin sarkan kısmı için tork eşitliği koşulunu yazmamıza izin verir çünkü ipin kütle merkezini yatay koordinatı bilinir. Sıradaki problem bu yaklaşımın uygulandığı bir örnektir.

**pr 13.** Bir çocuk  $L = 50$  m uzunluğundaki bir ipi, ipin bir ucunu  $H = 1$  m yerden yükseklikte tutarak çekmektedir. Yerin sürtünme katsayısı  $\mu = 0.6$ 'dır. İpin yere değmeyen kısmı  $l$ 'nin uzunluğu nedir?

**pr 14.** Uzunluğu  $l$  olan hafif bir çubuğun tavana tutturulduğu menteşe, çubuğun yalnızca tek bir düzlem üzerinde hareket etmesini sağlamaktadır. Menteşe dikey bir eksen etrafında  $\omega$  açısal hızıyla çevriliyor. Küçük bir top çubuğun diğer ucuna sabitlenmiştir. (a) Sistemin dikey oryantasyonunun kararlı olduğu açısal hızları bulunuz. (b) Şimdi top başka bir menteşeye ve dolayısıyla başka bir özdeş çubuğa bağlanıyor (aşağıdaki şekile bakınız); üstteki menteşe yine

aynı şekilde döndürülüyor. Bu durumda dikey oryantasyonun kararlı olması için gereken koşul nedir?



Burada aşağıdaki fikrin kullanılması uygun olacaktır.

**Fikir 19:** Denge durumlarının stabillliği (kararlılığı) incelenirken iki seçenek vardır.

**Birincisi;** sistemin, küçük bir  $\Delta x$  yer değişimiyle ya da küçük bir  $\Delta\varphi$  açısıyla denge durumundan saptırıldığı varsayılır ve ortaya çıkan kuvvetin ya da torkun yönü — denge konumuna doğru olup olmadığı — bulunur.

**İkincisi;** potansiyel enerjideki toplam değişim, küçük yer değişimleri cinsinden ifade edilir. Böylece potansiyel enerjinin minimumunda mı yoksa maksimumunda mı olduğu bulunur (denge durumundaki bir sistem için potansiyel enerjinin ikisinden birisine sahip olması gerekir); minimum değer kararlı dengeye (stabillige) ve maksimum değer ise kararsız dengeye karşılık gelir (bu yöntemin genelleştirilmiş hali için Ek 5'e bakınız).

Yaklaşık olarak hesaplamaya dikkat edin! Ufak sapmalarda, kuvvetlerle (torklarla) çalışırken nerdeyse her zaman ilgili sapsamalara sadece lineer olarak bağlı olan terimlerle çalışmak yeterli olacaktır; potansiyel enerjiyle çalışırken ise ikinci dereceden terimler de kullanılır.

Fizikte lineer, ikinci dereceden ve bazen de daha üst dereceden yaklaşımlar yapabilmek çok önemlidir. Bu yaklaşımlar şuna dayanır:

**Fikir 20:** Taylor serisi:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots,$$

Örneğin:  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ ;  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ;  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ,  $(1 + x)^a \approx 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2$ ,  $\ln(1 + x) \approx 1 + x - \frac{x^2}{2}$ . Benzer bir yaklaşım çok değişkenli ifadeler için de yapılabilir, örn.  $(x + \Delta x)(y + \Delta y) \approx xy + x\Delta y + y\Delta x$ . Bu yaklaşımlar, başta verilen bilgiler doğrultusunda bazı değişkenlerin küçük olması bekliyorsanız kullanışlı olacaktır.

(b) durumu iki tane serbestlik derecesine (örneğin çubukların sapma açıları  $\Delta\varphi_1$  ve  $\Delta\varphi_2$ ) sahip olduğu için önemli derecede daha zordur. Fikir 19 birden fazla serbestlik derecesi için genelleştirilebilir olsa da anlaşılan Fikir 15'den başlamak daha kolay olacaktır.

**Fikir 21:**  $x = y = 0$ 'da dengede olan ve iki tane serbestlik derecesi olan bir sistemin kararlı dengede olması için gerek (ve yeter<sup>28</sup>) koşul, potansiyel enerjinin  $\Pi(x, y)$  (iki değişkenli fonksiyon)  $x = y = 0$ 'da yerel minimumu olmasıdır, yani denge noktası  $(0, 0)$ 'nın etrafındaki küçük bir alan içindeki herhangi bir  $x, y$  çifti için  $\Pi(x, y) > \Pi(0, 0)$  eşitsizliği doğru olmalıdır.

**pr 15.** Eğer kare kesit alanlı ve düşük yoğunluklu bir çubuk suya yerleştirilirse, uzun ve karşılıklı olan yüzey çiftlerinden biri yatay olacak şekilde suda uzunlamasına yatar. Ancak bu

<sup>28</sup>Sistemde enerji dışında başka bir niceliğin korunmadığını varsayıyoruz.

<sup>29</sup>(Ç. N.) Ve sonrasında da çubuk, suyun içinde diklemesine duracağı pozisyona ilerler.

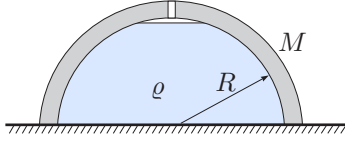
oryantasyon, çubuğun yoğunluğunu arttırdıkça kararsız hale gelir<sup>29</sup>. Bu geçişin olması için gereken kritik yoğunluğu bulunuz. Suyun yoğunluğu  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$  olarak verilmiştir.

**Fikir 22:** Eğer kaldırma kuvvetini yer değiştirmiş sıvının kütle merkezinden etki ediyor alırsak; sıvı içine yerleştirilen cisme etki eden tork, kaldırma kuvvetinden gelen torka eşit olur.

Fikir 22'nin geçerliliğini görmek için, cismin çıkarıldığını ve o hacme yeniden aynı sıvı doldurulduğunu hayal edelim. Bu doldurulan kısım elbette dengede olacaktır çünkü kapta halihazırda denge durumunda bulunan sıvının bir parçasıdır. Dolayısıyla, bu hacme etki eden kaldırma kuvvetinin oluşturduğu tork, yerine doldurulan sıvının ağırlığından kaynaklanan torku dengeleyecek şekilde olmalıdır; doldurulan sıvının ağırlığı kendisinin kütle merkezinden uygulanır, ayrıca Fikir 14'e göre de kaldırma kuvveti kütle merkezinden çizilen bir doğru boyunca etki ediyor olmalıdır.

Fikir 22 dışında, Problem 15'in çözümü Fikir 11 ve 12 kullanılarak sadeleştirilebilir.

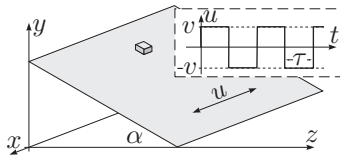
**pr 16.** Yarı küre şeklinde bir kap ters şekilde pürüzsüz yatay düzleme yerleştirilmiştir. Kapın tabanından açılan ufak bir delikten kap su ile doldurulur. Kap tam olarak dolduğunda su kapın kenarı ve düzlem arasından sızmaya başlıyor. Eğer su  $\rho$  yoğunluğuna sahipse ve yarı kürenin yarıçapı  $R$  ise kapın kütlesini bulunuz.



**Fikir 23:** Eğer su, ters duran kabın altından akıyorsa kap ile düzlem arasındaki tepki kuvveti yok olmuş demektir. Dolayısıyla, kap ve sıvı sistemine düzlemden etki eden kuvvet sadece hidrostatik basınçtan kaynaklanan kuvvete eşittir.

Bu kuvvet  $pS$  şeklinde verilir, burada  $p$  düzlemin yakınlardaki sıvının basıncı ve  $S$  ise kabın ağzının alanıdır.

**pr 17.** Bir blok, eğim açısı  $\alpha$  olan bir düzlemedir. Düzlem ve blok arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu > \tan \alpha$  olarak bilinmektedir. Düzlem öyle bir ileri-geri hareket ettiriliyor ki düzlemin hız vektörü  $\vec{u}$ , hem düzleme hem de yataya paralel oluyor ve büyüklüğü de her zaman  $v$  olarak kalıyor; burada  $\vec{u}$ 'nun yönü her geçen  $\tau$  zaman aralığında aniden değişmektedir. Bloğun ortalama hızı  $w$  ne olacaktır?  $g\tau \ll v$  olarak varsayınız.



**Fikir 24:** Eğer sistem yüksek bir frekansla değişiyorsa detaylı hesaplamalarla uğraşmaktansa zamana göre ortalaması alınmış ( $\langle X \rangle$ ) değerler kullanmak yararlı olur. Daha karmaşık durumlarda bir yüksek-frekans terimi,  $\tilde{X}$ , kullanılması gerekebilir. ( $X = \langle X \rangle + \tilde{X}$ )

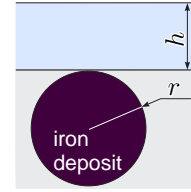
**Yöntem 2:** (Pertürbasyon yöntemi) Eğer bir kuvvetin cismin hareketi üzerindeki etkisi küçük kabul edilebiliyorsa problemi iki (veya daha fazla) durum için çözeriz: İlk olarak o kuvvetin olmadığı durumda cismin hareketini buluruz (sıfıncı dereceden yaklaşım), sonrasında ise cisim ilk durumda bulduğumuz şekilde hareket ediyormuş diye varsayar ancak üzerine bu küçük kuvvet etki ediyormuş gibi inceleriz. Bu kuvvetten dolayı sıfıncı yaklaşıma yapılmaması gereken düzeltmeyi (buna birinci dereceden düzeltme denir) buluruz.

Bu durumda sıfıncı yaklaşımın biraz daha açıklanması gerekiyor.  $g\tau \ll v$  ifadesi bloğun hızının bir periyotta çok da değişmeyeceği anlamına gelir. İlk hızı  $w$  olan, aşağıya doğru kayan bir bloğu kısa bir zaman aralığında inceleysek bloğun hızının sıfıncı yaklaşım ile sabit olduğunu varsayabiliriz, yani düz bir çizgi boyunca hareket ediyormuş gibi. Ardından bu durumda elde ettiğimiz harekete bağlı olarak ikinci durumu (küçük bir sürtünme kuvveti etki ettiği durum) inceleyip sürtünme kuvvetinin ortalama değerini buluruz.

Problem 17 için kinematikden de önemli bir noktanın anımsanması gerekir.

Fikir K-7: Eğer sürtünme hareketi etkiliyorsa genelde en uygun referans sistemi sürtünmeye sebep olan yüzeyin (veya ortamın) referans sistemidir.

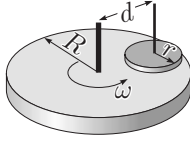
**pr 18.** Şimdi de demir yataklarının su seviyesini ne kadar etkileyebileceğini inceleyelim. Demir yatağının okyanusun dibinde,  $h = 2 \text{ km}$  derinlikte olduğunu düşünelim. Analizimizi kolaylaştırmak için demir yatağının  $1 \text{ km}$  yarıçaplı bir küre olduğunu varsayalım. Ayrıca bu maddenin yoğunluğu çevresindeki kayanın yoğunluğundan  $\Delta\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  kadar büyük olsun. Bu demir yatağının üst noktası okyanusun altına düşsün, yani kürenin merkezinin derinliği  $r + h$  olsun. Demir yatağının tam üstündeki noktada su seviyesi ortalama su seviyesinden ne kadar farklıdır?



**Fikir 25:** Denge durumundaki bir sıvının yüzeyi eşpotansiyel olur, yani sıvının yüzeyindeki sıvıyı oluşturan her bir molekül eşit enerjiye sahiptir.

Eğer durum böyle olmasaydı, sıvının potansiyel enerjisi yüzeyindeki moleküllerin yüzey boyunca potansiyellerinin daha az olduğu noktalara akmasına izin verilip azaltılabilirdi (Fikir 15). Olgu 10'u hatırlamakta da fayda var.

**pr 19.** Yatay bir platform dikey bir eksen etrafında  $\omega$  açısal hızıyla dönmektedir. Yarıçapı  $r$  olan bir disk, platformun ekseninden  $d > r$  kadar uzakta olan sürtünmesiz bir mil etrafında serbestçe dönebilir ve mil boyunca yukarı ve aşağı hareket edebilir. Disk yerçekiminden dolayı platform ile temas halindedir ve aralarındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ 'dur. Diskin kazandığı açısal hızı bulun. Bütün basıncın disk tabanında eşit bir şekilde dağıldığını varsayın.



**Fikir 26:** Eğer dönen referans sistemine geçerek tıpkı lineer hızları topladığımız gibi ani dönme eksenlerine göre açısal hızları da toplayabiliriz.

Dolayısıyla  $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ , burada  $\vec{\omega}_1$  referans sisteminin açısal hızı,  $\vec{\omega}_2$  cismin dönen referans sistemindeki açısal hızı ve  $\vec{\omega}_3$  ise cismin yer referans sistemindeki açısal hızıdır. Bu soruda Olgu 21'in yanı sıra kullanabileceğimiz fikirler: 2, 9, 13, K-7 ve

Fikir K-33: Bir rijit cismin rastgele hareketi, anlık bir dönme merkezi etrafındaki bir dönme hareketi olarak düşünülebilir (cismin hız vektörleri cinsinden).

**Yöntem 3:** (diferansiyel kalkülüs) Ya cisimi sonsuz küçük parçalara böleriz, ya da süreci sonsuz küçük zaman aralıklarına ayırırız (gerekirse bunu Fikir 20 ile birlikte kullanabiliriz).

Sonsuz küçük bir parça (veya zaman aralığı) için uzaysal değişen (veya zamanla değişen) özellikler sabit kabul edilebilir (bizim durumumuzda bu özellik sürtünme kuvvetinin yönüdür). Gerekirse bu özellikler (sonraki soruda da göreceğimiz üzere) her bir parça için toplanabilir - bu işleme "integral" denir.

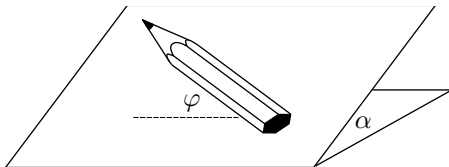
**pr 20.** Bir yüzü yoğun, kısa ve sert fırçalarla kaplı (yere konduğunda ağırlığının tabanına homojen dağılması için),  $M$  kütleli,  $R$  yarıçaplı ağır bir dairesel diskten oluşan bir mumlama makinesi düşünelim. Bir elektrik motoru diski  $\omega$  açısal hızıyla döndürüyor, kullanıcı ise sürtünme kuvvetinin oluşturduğu torku uzun bir sap yardımıyla gideriyor. Aynı sap makineyi zemin boyunca ileri geri hareket ettirmek için de kullanılabilir. Makineyi ne büyüklükte bir kuvvetle itmeliyiz ki  $v$  hızı ile hareket etsin? Diskin açısal hızının büyük olduğunu,  $\omega R \gg v$ , ve torku gidermek için gereken kuvvetin ihmal edilebilir olduğunu kabul edin. Fırçalar ve yer arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ 'dur.

Burada bize yardım edecek ifadeler: Olgu 21, Fikir K-33, 11, ve ek olarak

**Fikir 27:** Kuvvetlerin (veya torkların vb.) nokta çiftleri halinde yok olduğu bölgeyi belirlemeye çalışın.

Bu nokta çiftleri genelde simetrik olarak konumlanmıştır. Fikir 12 de konuyla ilgilidir.

**pr 21.** Eğim açısı  $\alpha$  olan bir eğik düzlemde tabanı altıgen olan bir kalem vardır; kalemin eksenini yatay ve eğik düzlemin kesişim çizgisi arasındaki açı  $\varphi$ 'dir. Hangi koşul altında kalem yuvarlanmaz?



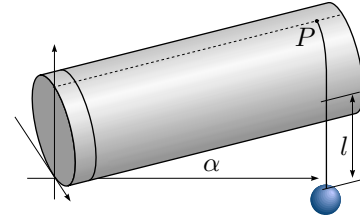
**Fikir 28:** Üç boyutlu problemleri çözerken; koordinatları, uygun biçimde seçilmiş eksenlerde hesaplayıp sonrasında uzaysal

### 3. STATİK

döndürme formüllerini uygulamak kullanışlı olabilir.  $z$  eksenini etrafındaki  $\varphi$  açılı bir döndürme için  $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$  ve  $y' = y \cos \varphi + x \sin \varphi$  olur.

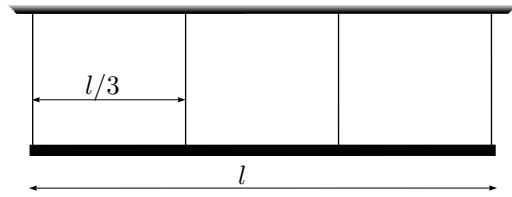
Bizim durumumuzda ne (hangi vektör) kendi bileşenleri cinsinden ifade edilebilir? Uygun görünen tek seçenek kütle merkezinin hareket etmeye başladığı andaki küçük kayma vektörüdür; en nihayetinde bu vektörün yalnızca dikey bileşeniyle ilgileniyoruz.

**pr 22.**  $R$  yarıçaplı kaygan bir silindir eksenine yatay arasındaki açı  $\alpha$  olacak şekilde eğilmiştir.  $L$  uzunluğundaki bir ip silindirin herhangi bir kesitinin en yüksek noktası olan  $P$  noktasına bağlanmıştır, ipin diğer ucuna ise  $m$  kütleli bir ağırlık bağlanmıştır. İp denge konumunu aldığı anda silindire temas etmeyen kısmının uzunluğu  $l$  ne kadardır? Kütle denge konumundan öyle kaydırılmıştır ki kayma vektörü silindirin eksenini içinde bulunduran dikey düzleme paraleldir; bu durumda küçük titreşimlerin periyodu nedir?



**Fikir 29:** Üç boyutlu bir cismin yüzeyinin bir kısmını açmak ve sonrasında düzleşmiş olan yüzey üzerinde çalışmak problemlerin çözümünde yarar sağlayabilir; diğer şeylerin yanı sıra en kısa mesafelerin bulunmasında çok işe yarar.

**pr 23.**  $m$  kütleli  $l$  uzunluğundaki homojen bir çubuk dört özdeş telle asılmıştır. Teller çubuğa her birinin arasındaki uzaklık  $\frac{l}{3}$  olacak şekilde bağlanmıştır. Tellerin her biri çubuğa dikdir ve çubuk yatay durmaktadır. Başlangıçta tüm tellerdeki gerilme kuvveti  $T_0 = mg/4$  olmak üzere aynıdır. En uçtaki tellerden biri kesildikten sonra tellerdeki gerilme kuvvetlerini bulunuz.



**Fikir 30:** Eğer bir cisim statik dengede tutmak için gerekli olandan fazla (başka bir deyişle serbestlik derecesi sayısından fazla) sabitleme elemanı (çubuklar, ipler vb.) kullanılırsa ve bu elemanlar tamamen katı cisimlerse o zaman bu elemanlardaki gerilmeler hesaplanamaz. Gerilmelerin hesaplanabilmesi için elemanların elastik (deforme olabilir) kabul edilmesi gerekir; Olgu 13'ü hatırlamanız faydalı olacaktır.

Bu durumun mevcut denklem sayısını veren Olgu 18'e (denklem sayısından daha fazla bilinmeyen olamaz) uygun olduğunu belirtelim. Bu özel durumda yatay kuvvetlerin olmadığı tek boyutlu bir geometride çalışıyoruz ama cisim tellerin yokluğunda dönebilirdi de. Bu yüzden yatay ve dikey harekete denk gelecek şekilde yalnızca iki serbestlik derecemiz var. Teller özdeş olduklarından aynı sertliğe sahipler; "tel"

kelimesi yüksek sertliği ima eder, başka bir deyişle deformasyonlar (ve çubuğun eğim açısı) küçüktür.

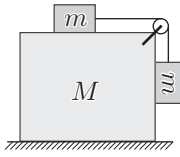
## 4 DİNAMİK

Dinamik problemlerinin çoğu cisimler üzerindeki kuvveti ya da sistemlerin ivmesini bulmaktan oluşur. Bu problemleri çözmek için olası birçok yaklaşım vardır, burada bunlardan üçüne değinilecektir.

**Yöntem 4:** Her cisim için o cisim üzerine etki eden kuvvetler, normal kuvvetleri ve sürtünme kuvvetleri dahil<sup>30</sup>, yazılır ve bileşenler cinsinden ( $x$ ,  $y$  ve belki de  $z$  eksenine izdüşüm alınarak) Newton'un 2'nci Yasası uygulanır. Yönlerin ve eksenlerin seçiminde dikkatli olunmalıdır, bkz. Fikir 1. Bazı durumlarda bileşenleri kullanmaktansa vektörel eşitliklerle çalışmak mümkün (ve daha kullanışlı) olabilir.

Şuna dikkat edilmesi gerekir ki doğru hazırlanmış bir problemde, bilinmeyen sayısı kadar lineer olarak birbirinden bağımsız denklem yazılabiliyor olmalıdır (Fikir 1 bu sayının azaltılmasında yardımcı olabilir). Kaç tane denklemin yazılabileceğinin tespit edilmesinin ana hatları statik problemleriyle aynıdır, Fikir 18'e bakınız (Şu an cisimlerin dönmediği problemleri inceliyoruz, bu yüzden sadece öteleme serbestlik derecelerini hesaba katmamız gerekir). Eğer bilinmeyenlerin sayısı ile denklem sayısı eşit değilse ya soru doğru hazırlanmamıştır ya da ek olarak bir fiziksel varsayımda bulunulması gerekir (problem 23'deki gibi).

**pr 24.** Kütleli  $M$  olan bir blok kaygan yatay bir zeminde durmaktadır. Üstünde ise  $m$  kütleli başka bir blok bulunmaktadır, bu bloğa da özdeş ikinci bir blok ile bağlanmıştır. İp büyük bloğun köşesine yerleştirilmiş bir makaradan geçirilmiştir ve ikinci küçük blok da dikey yönde sarkmaktadır. Başlangıçta sistem hareketsiz halde tutulmaktadır. Sistem kendi haline bırakıldıktan hemen sonra  $M$  kütleli bloğun ivmesini bulunuz. Sürtünmeleri ve iple makaranın kütlelerini ihmal edebilirsiniz.



Bu problem Yöntem 4 kullanılarak çözülebilir fakat üç tane daha fikire ihtiyaç duyarız.

**Fikir 31:** Eğer bir cisim en başta duruyor ise hareketin başlangıcından hemen sonra cismin kayma vektörü (ve ivmesi) ona etki eden kuvvete paralel olacaktır.

**Fikir 32:** Eğer cisimler bir iple, bir çubukla ya da belki de bir makarayla birbirine bağlıysa ya da birisi diğeri tarafından destekleniyorsa o zaman cisimlerin kayma vektörleri (ve hızları, ivmeleri) arasında lineer<sup>31</sup> bir aritmetik ilişki vardır. Bu ilişki cisimler arasındaki ipin (çubuğun vs.) uzunluğunun sabit olduğu gerçeğini yansıtır.

## 4. DİNAMİK

Kaymalar arasındaki ilişkiyi bulmak genelde en kolay iştir; eğer hareket düz bir çizgi boyuncaysa bu ilişkinin zamana göre bir ya da iki kere türevi alınarak hızlar ya da ivmeler arasındaki ilişki bulunabilir. Kavisli hareket için dikkatli olunmalıdır. Hızlar söz konusu olduğunda rijit cisimler için Fikir K-35'e (rijit cismin iki noktası için, o noktaların hızlarının noktaları birbirine bağlayan doğru üzerine izdüşümleri eşittir) ulaşırız, burada K kinematik kitapçığını belirtmektedir. İvmeler söz konusu olduğunda, merkezci ivme olacağından durum daha karmaşık bir hale gelir. Buna rağmen eğer hareket dengeden başlıyorsa, çok küçük bir zaman aralığı  $t$  için ivmenin sabit olacağını ve  $v^2/r$  merkezci ivmesinin ihmal edilebilir olacağını varsayabiliriz ( $v$  hızı halen çok küçük olacaktır), dolayısıyla belirli bir cismin belirli bir noktası için değişim  $\vec{s}$  ve ivme  $\vec{a}$  arasında  $\vec{s} = \frac{t^2}{2}\vec{a}$  basit lineer bağlantısı vardır; ardından  $\frac{t^2}{2}$  katsayısı farklı noktaların değişimlerini birbirine bağlayan lineer denklemlerde sadeleşir. Sonuç olarak direkt ivmeler arasındaki ilişkiyi veren denklem elde edilir.

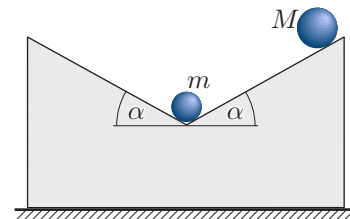
**Fikir 33:** Eğer hafif bir ip ideal bir makaradan (her ikinin de kütlesi ihmal edilebilir) sarkıtılırsa ip üzerindeki gerilmenin büyüklüğü makaranın makaranın her iki tarafında da aynıdır. Eğer ip makarada kıvrılmışsa makara ve ip arasında tepki kuvveti vardır, bu tepki kuvveti gerilme kuvvetlerinin vektörel toplamı yapılarak bulunabilir.

Doğrusu, makara ile temasta olan ip parçasını inceleyelim; kütlesi ihmal edilebilir, dolayısıyla Newton'un 2. yasasındaki eylemsiz terim de ihmal edilebilir. Bunun sonucu olarak ipe etki eden tepki kuvveti gerilme kuvvetlerinin vektörel toplamına eşit ve zıt yönde olmalıdır.

**Yöntem 5:** Aksi takdirde Yöntem 4 ile aynıdır, ancak hareket cisimlerden birinin durgun olduğu eylemli referans sisteminde incelenir. (bkz. Fikir 7).

Yöntem 5 takozlarla ilişkili çoğu soruda kullanışlıdır: bir cismin takoz üstünde durabilmesi için gerekli koşulu yazmak laboratuvar referans sisteminde zordur. Fikir 32'yi uygulamak da genellikle takoz referans sisteminde laboratuvar referans sistemine kıyasla daha kolaydır. Referans sistemini tanımlayan cismin dengede olduğu unutulmamalıdır: *cismin statik dengeğini açıklayan bir veya daha fazla denkleminiz var.*

**pr 25.** Bir takoz çok kaygan ve hafif bir maddeden yapılmıştır. Üst yüzeyi yatayla  $\alpha$  açısı yapan ve birbirine doğru eğimli iki yokuştan oluşmaktadır. Takoz yatay bir düzleme yerleştirilir;  $m$  kütleli bir top da takozun üst yüzeyindeki çukurun dibine yerleştirilir.  $M$  kütleli başka bir top da ilk toptan daha yukarıya yerleştirilir ve sistem serbest bırakılır. Hangi koşulda  $m$  kütleli top yokuştan yukarı kayar? Sürtünme ihmal edilebilir.



<sup>30</sup>Cismin üzerine etki eden kuvvetleri etki ettiği noktalardan vektörel olarak çizmek kullanışlı olacaktır.

<sup>31</sup>Aralarındaki ilişki lineerdir fakat katsayıları lineer olmayan fonksiyonlar olabilir, örn. açıların trigonometrik fonksiyonları

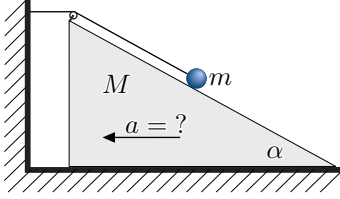
Son yöntem *genelleştirilmiş koordinatlara* dayanır ve analitik mekanikten gelir. Bu *Lagrangian formalizmi* olarak bilinir ve nispeten gelişmiş matematiksel yöntemler (kısmi türevler, değişken analizi) kullanılarak tanımlanır, fakat çoğu problem için aşağıdaki basitleştirilmiş hali yeterli olacaktır. Lagrangian formalizmi ile alakalı daha detaylı bir tartışma için bkz. Ek 6.

**Yöntem 6:** Eğer sistemin durumu tek bir sayı ile ifade edilebiliyorsa bu sayıya genel koordinat,  $\xi$ , diyelim. Bu  $\xi$  koordinatının ivmesini,  $\ddot{\xi}$ , bulmaya çalıştığımızı düşünün. Eğer sistemin potansiyel enerjisini,  $\Pi$ ,  $\xi$ 'nin bir fonksiyonu  $\Pi(\xi)$  olarak; kinetik enerjisini ise  $K = \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2$  (burada  $\mathcal{M}$  cisimlerin kütlelerinin -ve belki de eylemsizlik momentlerinin- bir kombinasyonudur) şeklinde yazarsak

$$\ddot{\xi} = -\Pi'(\xi)/\mathcal{M}.$$

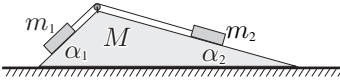
Burada nokta zamana göre türevi ifade ederken kesme işareti  $\xi$  koordinatına göre türevi ifade etmektedir. Aslında, enerji korunumundan dolayı  $\Pi(\xi) + \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2 = \text{Sabit}$ . Bu ifadenin zamana göre türevini alıp zincir kuralını uygularsak  $\Pi'(\xi)\dot{\xi} + \mathcal{M}\dot{\xi}\ddot{\xi} = 0$  ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi  $\dot{\xi}$ 'ye bölersek daha önce de değindiğimiz formülü elde etmiş oluruz.

**pr 26.** Kütleli  $m$  olan küçük bir blok, eğim açısı  $\alpha$  olan  $M$  kütleli bir takozun üzerinde bulunmaktadır. Blok; takozun ucuna tutturulmuş bir makaradan geçen ve duvara yatay olarak sabitlenmiş bir ipe bağlanmıştır (şekildeki gibi). Takozun ivmesini bulun. Bütün yüzeyler kaygandır (Sürtünme yoktur.)



Yöntem 6'yı örneklemek için bu problemin tam çözümü ipuçları bölümünde bulunmaktadır.

**pr 27.** Kütleli  $M$ , dar açıları  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  olan bir takoz yatay bir zemindedir. Uçlarında  $m_1$  ve  $m_2$  kütleli bloklar olan bir ip, bu takozun üstündeki bir makaradan geçirilmiştir. Takozun ivmesini bulun. Sistemin hiçbir yerinde sürtünme yok.



Bu sorunun birden çok serbestlik derecesi varmış gibi gözüküyor: takoz hareket edebilir ve ip takozu göre yer değiştirebilir. Ancak, şu bize yardımcı olacaktır:

**Fikir 34:** Eğer dış kuvvetlerin  $x$  komponentleri toplamı ve kütle merkezinin hızının  $x$  komponenti sıfırsa kütle merkezinin  $x$  koordinatı değişmez.

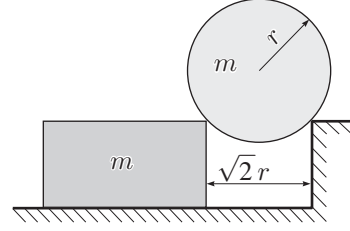
Bu durumu efektif serbestlik derecesi sayısını azaltmak için kullanabiliriz. Bizim durumumuzda sistem iki komponentten meydana geliyor, dolayısıyla bir komponentin değişimini diğeri cinsinden ifade edebiliriz.

**Fikir 35:** Cisimlerden oluşan bir sistemin kütle merkezinin  $x$  koordinatı

$$X_C = \sum x_i m_i / \sum m_i$$

ifadesiyle verilir; burada  $m_i$ ,  $i$ . cismin kütlesi,  $x_i$  ise  $i$ . cismin kütle merkezinin  $x$  koordinatıdır. Bu formül  $X_C = \int x dm / \int dm$  şeklinde integral formunda da yazılabilir. Burada  $dm = \rho(x, y, z)dV$  çok küçük bir kütle parçacığını ifade eder.

**pr 28.** İki yatay kaygan yüzey bir basamak oluşturmuştur. Basamakla aynı yükseklikteki  $m$  kütleli bir blok basamağa doğru yaklaştırılmış ve blokla basamak arasındaki boşluğa  $r$  yarıçaplı,  $m$  kütleli bir silindir yerleştirilmiştir. Blokla basamak arasındaki boşluğun uzunluğu  $\sqrt{2}r$  iken silindir ve basamak arasındaki tepki kuvveti  $N$ 'yi bulunuz. Başlangıçta blok ve basamak birbirine çok yakındır ve tüm cisimler hareketsizdir. Sürtünme her noktada sıfırdır. Silindir önce bloktan mı ayrılır yoksa basamaktan mı?



Bu problemin çözümü esnasında çok karmaşık ifadelerle karşılaşılabilir ve bu durum hata yapılmasına yol açabilir. Dolayısıyla denklemleri yazmaya başlamadan önce çözümü dikkatlice planlamak önemlidir.

**Fikir 36:** Newton'ın yasaları genelde kuvveti kullanarak ivmeyi bulmak için kullanılır ama bazen ivmeyi kullanarak kuvveti bulmak daha mantıklı olabilir.

Bu durumda ivmeleri nasıl bulabiliriz? Yöntem 6'yı kullanarak kesinlikle sonuca ulaşabiliriz fakat bu yolu kullanmak çok uzun ifadelerle yol açar. Stratejik olarak şunu önerebilirim: eğer çözüm çok karmaşıklaşıyorsa kısa bir ara verin ve daha kolay bir çözüm yolu olup olmadığını düşünmeye başlayın. Bu soruda 'tesadüfi' bir durum gerçekleşiyor: kürenin merkeziyle temas noktalarını birbirine bağlayan çizgiler birbirlerine dik, belki bu durumdan yararlanılarak çözüm kolaylaştırılabilir? Deneyerek gerçekten de öyle olduğunu görebilirsiniz.

**Fikir 37:** Özel durumlara dikkat edin ve ortaya çıkardıkları basitleştirmeleri kullanın!

Kinematik'te öğrendiklerimizi hatırlayalım:

**Fikir-K-34:** Eğri bir yüzey boyunca yapılan bir harekette ivmenin radyal (yörüngeye dik) olan bileşeni  $v^2/R$ 'yi hız  $v$  ve eğrilik yarıçapı  $R$  belirler; yörünge boyunca olan ivme ise çizgisel ivmedir (dönme hareketinde  $\varepsilon R$ 'ye eşittir,  $\varepsilon$  açısal ivmedir.).

Silindirin kütle merkezi dönme hareketi yapar ve açısal ivmeyi bulmak için Yöntem 6'yı kullanmamız gerekir — fakat biz onu kullanmaktan kaçınmayı umuyoruz. Fikir 1'e yapılacak olan bir geliştirme bu konuda bize yardım edebilir:

**Fikir 38:** Newton'un İkinci Yasası'nı istenmeyen bir vektöre, örneğin bilinmeyen bir kuvvete veya ivmenin teğet bileşenine, dik olan bir eksen için yazın.

Silindirin hızını (dolayısıyla ivmenin radyal bileşenini) aşağıdaki fikri kullanarak kolaylıkla bulabiliriz:



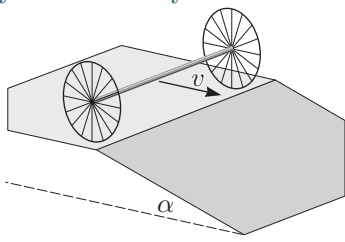
**Fikir 39:** Eğer enerji korunuyorsa (veya değişimi yapılan işten vb. hesaplanabiliyorsa) hemen sistemin enerjisini yazın. Enerji sistemde bir kayıp (sürtünme, elastik olmayan çarpışma vb.) yoksa ve sisteme etki eden dış kuvvetler statikse (örneğin hareketsiz eğik düzlem) korunur;

zamanla değişen kuvvetler (hareketli bir noktaya etki eden kuvvet, hareket eden eğik düzlem gibi) de enerji değişimine sebep olur. Fikir 32 enerji korunum denklemini (cisimlerin hızları arasındaki bağıntı) yazmamıza yardımcı olur. İkinci soru için, şuna ihtiyacımız var:

**Fikir 40:** Tepki kuvveti, cisim yüzeyden ayrıldığı an yok olur.

Ayrıca ivmenin yatay bileşenleri için Fikir 32'yi hatırlamak faydalı olacaktır.

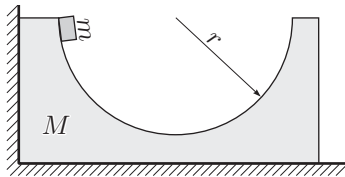
**pr 29.** Yarıçapı  $R$  olan hafif tekerlekler ağır bir mile tutturulmuştur. Sistem, aniden  $\alpha$  eğim açılı bir eğik düzleme dönüşen yatay bir zeminde yuvarlanmaktadır. Hangi  $\alpha$  açıları için tekerlek yerden havalanmadan, yani her an yüzeye temas ederek harekete devam edecektir? Tekerlerin kütleleri ihmal edilebilir. Mil, yatay ve eğimli düzlemlerin birleştiği çizgiye paralel ve  $v$  hızıyla hareket ediyor.



**Fikir 41:** Bir cismin yüzeyden ayrılıp ayrılmadığını anlamak için, yüzeyden ayrılmadığı hareketindeki en küçük tepki kuvveti değerine sahip anı bulmalıyız.

Eğer tepki kuvvetinin o noktada negatif olması gerekiyorsa cisim yüzeyden ayrılıyor demektir, yani kritik değer sıfırdır - Fikir 40) ile karşılaştırın. Ayrıca Fikir 1, 39 ve K29'u gözden geçirin.

**pr 30.** Kütleli  $M$  olan bir blok, kaygan bir yatay zeminde durmaktadır ve dikey bir duvara temas etmektedir. Bloğun üst yüzeyinde  $r$  yarıçaplı bir yarım silindir şeklinde bir oyuk var. Kütleli  $m$  olan küçük bir topak oyukun duvara yakın olan üst kenarından bırakılıyor. Bloğun topak bırakıldıktan sonraki hareketi boyunca maksimum hızı ne olacak? Sürtünme kuvveti ihmal edilebilir.



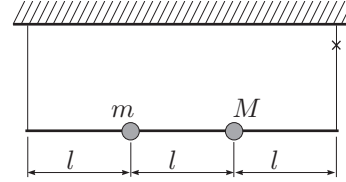
**Fikir 42:** Korunum yasası sadece bazı zaman aralıkları için geçerlidir.

**Fikir 43:** Momentum, dış kuvvetlerin toplamı sıfırsa korunur. Bazen momentum sadece bir eksen boyunca korunur.

Fikir 39'a da ihtiyaç duyacağız.

**Fikir 44:** Hız, ivme (ve net kuvvet) sıfırken bir uçteğindedir<sup>32</sup> ( $0 = \frac{dv}{dt} = a$  olduğundan); yer değişimi ise hız sıfırken bir uçteğindedir. Diğer olası çiftler: elektrik yükü (kapasitörün voltajı)-akım, akım-indüksiyon emk'sı vb.

**pr 31.**  $3l$  uzunluğunda hafif bir çubuk eşit uzunluklu iki ipele tavana bağlanmıştır. Kütleleri  $m$  ve  $M$  olan, aralarındaki ve uç noktalarla aralarındaki mesafe eşit olup  $l$  uzunluğunda olacak şekilde iki top çubuğa sabitlenmiştir. Birinci ip kesildikten hemen sonra ikinci ipteki gerilmeyi bulunuz.



Bu problem için hepsi Fikir 36'yı uygulama ve çubuğun açısız ivmesini bulma ihtiyacını paylaşan birçok iyi çözüm vardır. İlk olarak, çubuğun açısız ivmesi dönme açısı  $\varphi$ 'yi genelleştirilmiş koordinat seçerek Yöntem 6'dan bulunabilir. İkinci olarak, dönme için Newton'un 2. yasasını kullanabiliriz: ikinci ipin bağlantı noktasına göre torku hesaplayıp bulduğumuz torku  $I\varepsilon$  eşitleyebiliriz. Burada,  $\varepsilon$  açısız ivme ve  $I = ml^2 + 4Ml^2$  de eylemsizlik momentidir. Daha genel olarak,

**Fikir 45:** Bir cisim  $s$  ekseninde dönüyorsa, net tork  $M = I\varepsilon$  (cismin kütlesi ile karıştırılmamalıdır) olur. Burada  $I$ ,  $s$  eksenine göre eylemsizlik momentidir,  $I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \rho \cdot dV$  ve  $r_i$  de  $i$ . parçacığın  $s$  ekseninden uzaklığıdır (toplam cismin tüm parçaları üzerinden alınmıştır). Kinetik enerji de  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$  şeklinde verilir.

Açısız ivme bulduktan sonra Fikir 36'yı uygulamak için şunu kullanmak yardımcı olabilir:

**Fikir 46:** Newton'un 2. yasasının daha genel ve bazen vazgeçilmez hali  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$  olarak verilir. Burada  $\vec{P}$  sistemin net momentumu ve  $\vec{F}$  de sisteme etki eden tüm dış kuvvetlerin toplamıdır. Buna paralel olarak  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  yazılabilir. Burada  $\vec{L}$  sistemin net açısız momentumu (belirli bir noktaya göre) ve  $\vec{M}$  de tüm dış torkların toplamıdır.

Bizim durumumuzda son yöntem hem kuvvete hem de torka uygulandığında çok verimli olur.

Başka bir çözüm de çubuk ve topları üç farklı (etkileşen) cisim olarak incelemektir. Daha sonra topların ivmeleri Fikir 32'ye göre bulunabilir;

**Fikir 47:** Çok hafif (diğer cisimlere göre) cisimlere etki eden net kuvvet ve tork sıfırdır.

fikri de kullanışlı olabilir.

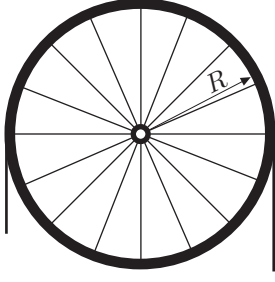
Eğer bu doğru olmasaydı sıfır olmayan her kuvvet kütleli bir cisimde sonsuz ivme oluşturacaktı.

**pr 32.** Birim uzunluk başına kütlesi  $\rho$  ve toplam uzunluğu  $L$  olan uzatılmaz ve sert olan bir halat, makaranın bir tarafından sarkan uzunluğu  $l$  olacak şekilde makaraya geçirilmiştir. Makara, hafif tellerle yatay bir aksa tutturulmuş  $m$  kütleli ve yarıçapı  $R$  olan bir çemberden oluşmuştur. Başta hareketsiz

<sup>32</sup>İngilizce: extremum.

#### 4. DİNAMİK

tutulan sistem serbest bırakılıyor. Hareket başladıktan hemen sonra aks üzerindeki kuvveti bulunuz. Makara ve aks arasındaki sürtünme ihmal edilebilir.



Neden şöyle ilerlemeyelim ki: kuvveti bulmak için Fikir 36'yı kullanırız; sistemin ivmesi ise Yöntem 6 kullanılarak bulunur. Fikir 36'yı daha rahat kullanabilmek için şunu söyleyebiliriz:

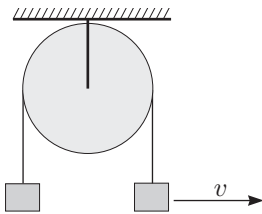
**Fikir 48:** Newton'un 2'nci Yasası  $\vec{F} = M\vec{a}_C$  şeklinde yazılabilir, burada  $\vec{a}_C$  kütle merkezinin ivmesidir.

Bu fikir sistemin kütlelerinin bir kısmı hareketsiz ve sadece diğerine görece küçük kütleli bir kısmı hareketli ise yararlı olur (tıpkı bizim durumumuzda olduğu gibi: küçük bir zaman aralığı geçtikten sonra aradaki tek fark, bir uçta halatın küçük bir kısmı "kaybolmuştur" ve diğer uçta "kazanılmıştır"). Tabii ki Fikir 34 burada kullanışlı olacaktır ve Fikir 11 size zaman kazandıracaktır. Şuna dikkat edilmelidir ki biz bu durumda kütle merkezinin koordinatını zamana göre bulmaya çalışmıyoruz, sadece değişiminin zamana göre fonksiyonuyla ilgileniyoruz. Bu yüzden bu koordinatın ifadesindeki zamana bağlı olmayan terimleri ihmal edebiliriz: zamana göre türevleri yok olacaktır. Kütle merkezinin koordinatının zamana bağlı olan kısmı Yöntem 6'da kullanılacak olan koordinatla ifade edilmelidir (çünkü Yöntem 6'da zamana göre ikinci türevi bulunacaktır). Küçük teknik bir tavsiye yardımcı olabilir: bir vektör  $(a)$  büyüklüğü ve yönüyle;  $(b)$  belirlenen koordinat sistemindeki eksenlere olan izdüşümleriyle belirlenir;

**Fikir 49:** Bazen, sadece büyüklüğüyle ilgilensek bile bir vektörün bileşenlerini hesaplamak daha kolaydır.

Her şeyden önemlisi bu yöntem vektörün yönü bilinmediğinde ya da belirgin olmadığında da işe yarar. Bu durumda  $F_x$  ve  $F_y$ 'yi uygun bir koordinat sisteminde bulmamız gerekir.

**pr 33.** Makaranın üstüne bir ip geçirilmiştir. İpin uçlarında ise kütleleri eşit olan bloklar vardır. En başta iki blok aynı yüksekliktedir. Bir tanesine aniden küçük ve yatay bir  $v$  hızı verilmiştir. İlerleyen hareket boyunca bu iki bloktan hangisi daha yükseğe çıkacaktır? Makaranın ağırlığı ihmal edilebilir.



Bu problem gerçekten zorlayıcıdır çünkü gerekli çözüm çok özgündür ve az kullanılır.

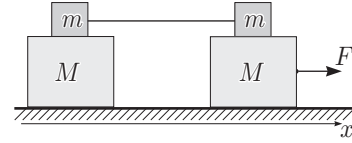
**Fikir 50:** Eğer bir sistemin kütle merkezi hareket edemiyorsa üzerine etki eden net kuvvet sıfırdır.

Burada kütle merkezi azıcık hareket edebilir ama uzun vadede (itme verilmiş bloğun sarkaç benzeri hareketinin bir periyodu üstünden zamana göre ortalaması — Fikir 24 ile karşılaştırmamız.) hareketsizdir: blokların kütleleri ayndır, dolayısıyla içlerinden birinin yükselmesi kütle merkezinin konumunu veren ifadede diğer bloğun alçalmasıyla dengelenecektir. Aynı durum kütle merkezinin koordinatlarının yatay bileşeni için de geçerlidir fakat bu problemin çözümü için yalnızca dikey bileşenin incelenmesi yeterlidir. Aynı zamanda oldukça belirgin olan bir durumdan da bahsedelim:

**Olgu 24:** Kütleli bir makaraya geçirilmiş veya sürtünmesiz bir yüzeyde çekilen kütleli bir ipteki gerilme her noktada aynıdır.

Çözüm algoritması şu şekildedir: Newton'un İkinci Yasası'nı  $(a)$  iki bloktan oluşan sistem için ve  $(b)$  tek bir blok için yazarız: iki denklemin ortalamalarını alır ve  $(a)$ 'da görülen eşitliği ipteki ortalama gerilmeyi bulmak için kullanırız. Sonrasında ulaştığımız sonucu denklem  $(b)$ 'de yerine koyarız. Fikir 24'e dayanarak ipteki gerilmeyi ortalama ve yüksek frekans bileşenlerine ayırırız ve Fikir 20'yi kullanırız.

**pr 34.** Bloklardan oluşan bir sistem pürüzsüz bir yüzey üzerinde şekildeki gibi durur. Bloklar arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ , bloklarla yüzey arasındaki ise  $\mu = 0$ 'dır.



Sağ alttaki blok bir  $F$  kuvvetiyle çekiliyor. Bütün blokların ivmelerini bulunuz.

**Fikir 51:** Cisimlerin birbirlerine sürtünme kuvvetleriyle bağlı olduğu durumlarda, bazı soruların tamamen cevaplanabilmesi için sistemde birbirine temas eden tüm yüzeyler arasındaki olası bağıl kayma durumlarının hepsi incelenmelidir.

Örneğin, eğer birbirine temas eden iki cisim arasında kayma olmadığını varsayarsak bu iki cisime tek bir cisim gibi bakabiliriz. Bu durumda cisimler arasındaki sürtünme kuvveti  $F_h$  bulunmalı ve bu varsayımın hangi durumlarda geçerli olduğu incelenmeli, veya  $F_h$ 'ın ne zaman maksimum statik sürtünme kuvveti olan  $\mu N$ 'den küçük olduğu bulunmalıdır.

**pr 35.** Bir bilardo topu hareketsiz olan bir diğer bilardo topuna çarpar. Hareketsiz top çarpışmadan önce hangi noktalara konduğunda iki topun da masadaki farklı deliklere girmesi mümkün olur? Çarpışmalar tam elastiktir ve toplar tam olarak kaygandır (dolayısıyla topların dönmesi ihmal edilebilir).

**Fikir 52:** Eğer tamamen elastik bir top hareketsiz olan özdeş başka bir topa çarparsa ve topların dönmesi ihmal edilebiliyorsa o zaman çarpışmadan hemen sonra iki topun hız vektörleri birbirlerine dik olur.

Bu durumu ispatlamak için, üç hız vektörünün (çarpışmadan önceki hız ve çarpışma sonrasındaki iki hız vektörü) momentum korunumundan dolayı bir üçgen oluşturduğuna dikkat edin. Enerji korunumunu da oluşan üçgenin kenarlarının Pisagor

#### 4. DİNAMİK

Teoremi'ne uyduğunu gösterir. Bu sonucun özel bir durumu (bir sonrakinden sonraki probleme bakınız) şudur:

**Olgu 25:** Elastik bir top özdeş ve hareketsiz olan bir diğer topa merkezi çarpışma yaparsa çarpan top durur ve diğeri duran topun hızıyla harekete başlar.

**pr 36.** Tamamen elastik ve kaygan bir bilardo topu  $v$  hızı ile iki diğer özdeş ve hareketsiz topa doğru hareket etmektedir. Hareketsiz olan iki top birbirine temas etmekte ve kütle merkezleri, gelen topun hız vektörüne dik olan bir çizgi üzerinde bulunmaktadır. Hareketli top tam olarak diğer iki topun temas noktasına doğru hareket etmektedir. Başta hareketli olan topun çarpışmadan sonraki hızını bulun. İki durum ele alın: (a) başta hareketli olan top tam olarak iki topun orta noktasına çarpıyor; (b) başta hareketli olan topun yönü çok küçük olmak üzere sapıyor ve diğer iki toptan birine, oldukça küçük bir zaman farkıyla daha önce çarpıyor.



İlk soruyu cevaplamak için şuna ihtiyaç vardır:

**Fikir 53:** Çarpışmaları (ve çok sayıda cismin etkileşimini içeren durumları, bir ipile veya yayla bağlanmış topların hareketi gibi), kütle merkezi referans sisteminde incelemek daha kolaydır çünkü bahsedilen durumlarda momentum korunumunu en rahat kütle merkezi referans sisteminde yazarız (toplam momentum sıfırdır).

Fikir 39'u da unutmayın. İkinci soru için, şunu kullanın:

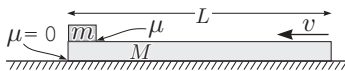
**Fikir 54:** Eğer bilinen bir zaman aralığında bir cisme etki eden kuvvet yön değiştirmiyorsa aktarılan momentum kuvvet ile aynı yöndedir.

**pr 37.** Tamamen elastik  $n$  adet boncuk sürtünmesiz bir tel boyunca kayıyor. Gerçekleşebilecek maksimum çarpışma sayısını bulun. Boncukların büyüklüğü ve aynı anda ikiden fazla boncuğun çarpışma olasılığı ihmal edilebilir.

**Fikir 55:** Bu süreci görsel olarak betimlemek, mesela bir grafik ile, fazlasıyla yardımcı olur.

Bir yardımcı soru: İki cismin elastik çarpışması  $x-t$  grafiğinde nasıl görünür?

**pr 38.** Uzunluğu  $L$ , kütlesi  $M$  olan bir kalas, pürüzsüz yatay bir zeminde bulunmaktadır. Bu kalasın bir ucunda  $m$  kütleli küçük bir blok durmaktadır. Bu blok ile kalas arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ 'dur. Kalasa anid bir itmeyle verilmesi gereken minimum hız  $v$  ne olmalıdır ki hareket sırasında blok kalas boyunca kaysın ve kalastan düşsün? Bloğun boyutu ihmal edilebilir.

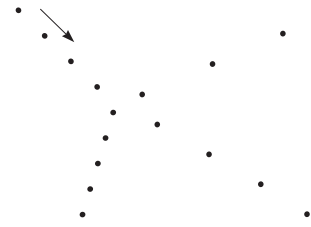


Bu sorunun aşağı yukarı özdeş iki çözümü var. İlk olarak Fikir 7'yi kullanarak çözebiliriz. İkinci yol için ise Fikir 39 ve 53'ü ve ek olarak şunu kullanabiliriz:

**Fikir 56:** Eğer bir cisim düz bir yüzeyde hareket ediyorsa ısıya dönüşen enerji, cismin kayarken aldığı yol ile sürtünme kuvvetinin çarpımı olarak ifade edilebilir.

Gerçekten, sürtünme kuvvetinin büyüklüğü sabittir. Desteğin referans sisteminden de görülebileceği üzere, yönü her zaman yer değişimine paraleldir.

**pr 39.** Verilen şekil stroboskopik bir fotoğraftan elde edilmiş olup iki eşit çaplı ancak farklı kütleli topun çarpışmasını anlatmaktadır. Ok, cisimlerin birinin çarpışmadan önceki hızının yönünü ifade etmektedir. Topların kütlelerinin oranını bulun ve ikinci topun çarpışmadan önceki hareketinin yönünü gösterin.



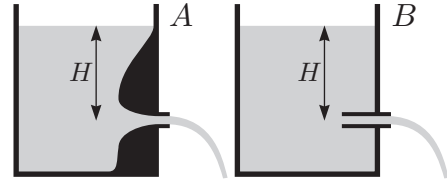
**Fikir 57:** Bazen momentumları vektör olarak ele almak kullanışlıdır, aynı şekilde vektörel toplam ve farklarına da üçgen ve paralelkenar kuralları uygulanabilir (bu ayrıca diğer vektörel nicelikler için de geçerlidir: yer değişimleri, hızlar, ivmeler, kuvvetler vs.)

Daha açık konuşmak gerekirse: iki cisim birbiriyle etkileşirken, impuls vektörü cisimlerin momentumlarının farklarına eşittir. Fikir 5'le karşılaştırmız.

**Olgu 26:** Stroboskopik bir fotoğrafta, bir cismin herhangi bir konumundan bir sonraki konumuna olan vektör hızına (ya da hız vektörüne) orantılıdır.

**Olgu 27:** Eğer iki cisim etkileşmiş ise bu iki cismin momentumlarının değişimi birbirine eşit ve zıttır (Newton'un 3'üncü Yasası).

**pr 40.** Musluklarının tasarımları farklı olan iki tane varil ( $A$  ve  $B$ ) vardır, şekilde görüldüğü gibi. Musluklar açılmıştır ve suyun yüzeyinin muslukta olan uzaklığı iki varil için de  $H$ 'dir. Akan suyun varilleri terk ederkenki hızı nedir?



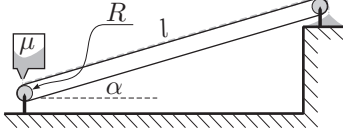
**Fikir 58:** Eğer bir problem hem enerji hem de momentum korunumu kullanılarak çözülebilir gibi gözüküyorsa, o zaman bu ikisinden en azından biri aslında korunmuyordur!

Diğer şekilde olamaz: en sonunda cevaplar birbirinden farklıdır. Burada dikkat edilmesi gerekir.  $A$  musluğu tasarlanırken akışın laminerliğinin korunmaya çalışıldığı açıkça ortadadır: enerji korunur. Fakat, eğer Yöntem 3'den esinlenerek sonsuz küçük bir  $dt$  zaman aralığında hava basıncı tarafından su akıntısına aktarılan momentumu yazmaya kalkarsak— $pSdt$  (burada  $S$  musluğun kesit alanıdır), suyun akışından dolayı  $p \neq \rho g$  olduğunu görürüz (karşılaştırmız; dinamik basınç, Bernoulli Yasası!).

Bunun yanı sıra  $B$  musluğu için laminer akış korunmamıştır, girdaplar ve enerji kaybı olacaktır. Ama yine de momentumla çalışabiliriz: varilin duvarları tarafından sıvıya

aktarılan basıncı yazarız (genellikle sağ ve sol taraftaki duvarların basınçları birbirini yok eder ama yine de  $S$  kesit alanlı musluğun sol tarafına etki eden dengelenmemiş bir  $p = \rho g H$  basıncı kalır.

**pr 41.** Bantlı taşıyıcı tarafından bir inşaat alanına kum taşınmaktadır. Bantın uzunluğu  $l$ 'dir ve yatayla yaptığı açı  $\alpha$ 'dır; bant aşağıdaki  $R$  yarıçaplı ve dışarıdan güç alan bir makara tarafından hareket ettirilmektedir. Kum bantın üzerine sabit bir  $\mu$  (kg/s) oranla konulmaktadır. Kum taşımak için gereken minimum tork nedir? Bu torkun etkisi altında bantın hızı nedir? Kum taneciklerinin başlangıçtaki hızını sıfır kabul edin, sürtünme katsayısı banta düşen kum taneciklerini anında hareketsiz hale getirecek kadar büyüktür.



**Olgu 28:** Herhangi bir şeyi hareket ettirmek için —cisimler veya akışlar (örn. kumun akışı)— kuvvet uygulanmalıdır.

Bu problemin çözümünde Fikir 58 ve Yöntem 3 şuna ek olarak işimize yarayacaktır:

**Fikir 59:** (Süreklilik koşulu) Değişmeyen bir akışın akışı (birim zaman başına akışın kesit alanından geçen madde miktarı) sabit ve akışın kesit alanından bağımsızdır:  $\sigma v = \text{Const}$  [ $\sigma(x)$  birim uzunluktaki madde yoğunluğu ve  $v(x)$  — akışın hızıdır].

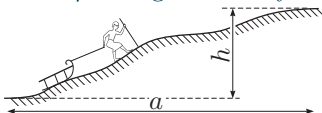
Bir borudaki sıkıştırılmayan (sabit yoğunluklu) bir sıvının akışı için, bu yoğunluk  $\sigma = \rho S$  olur ve dolayısıyla  $vS = \text{sabit}$ . Uzayda akışın boşaltıldığı bir bölge için —bir lavabo— kütle artar:  $\frac{dm}{dt} = \sigma v$ — bu denklem de sürekliliğin koşulu olarak adlandırılabilir.

**pr 42.** Biçimlendirilebilir bir kil damlası  $h$  yüksekliğinden zemine düşüyor ve kaymaya başlıyor. Eğer zemin ile damla arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$  ise damlanın kaymaya başlamadan hemen önceki hızı ne kadardır? Damlanın ilk yatay hızı  $u$  olarak biliniyor.

**Fikir 60:** Eğer sert bir duvarla çarpışmada her zaman kayma varsa duvar boyunca ve duvara dik aktarılan impulsların oranı  $\mu$  olur.

Doğrusu,  $\Delta p_{\perp} = \int N(t)dt$  (etki süresi üzerinden integrallenir) ve  $\Delta p_{\parallel} = \int \mu N(t)dt = \mu \int N(t)dt$ .

**pr 43.** Bir çocuk tepeye yavaş yavaş çıkarken arkasındaki bir kızığı ip yardımıyla sürükleyerek çekmektedir. Eğer tepenin uç noktasının yükseliği  $h$  ve tepenin başlangıcından ucuna olan yatay uzaklık  $a$  ise çocuğun kızığı tepenin uç noktasına çıkarmak için yapması gereken iş ne kadardır? İpin her zaman tepenin teğetine paralel olduğunu ve kar ile kızık arasındaki sürtünme katsayısının  $\mu$  olduğunu varsayınız.

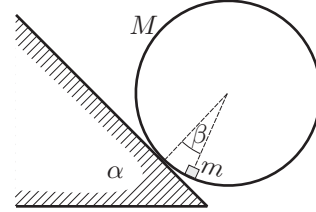


#### 4. DİNAMİK

**Olgu 29:** Eğer belirli bir yüzeyin tam şekli veya zamana bağlılığı verilmediyse genel durum ile ilgilenilmelidir: önermenin herhangi bir şekil için doğru olduğunu kanıtlayınız.

Açıkça, Olgu 29'u uygulamak için Fikir 3'e ihtiyaç olacak.

**pr 44.** Kütleli  $M$  olan bir silindirik kabuk, eğim açısı  $\alpha = 45^\circ$  olan eğimli bir yüzeyde kaymandan yuvarlanmaktadır. Silindirik kabuğun iç yüzeyinde  $m = M/2$  kütleli ve serbestçe kayabilen küçük bir blok bulunmaktadır. Silindirik kabuğun merkeziyle bloğu bağlayan çizginin ve eğik yüzeye dik olan doğrunun arasındaki  $\beta$  açısı ne kadardır?



En basit çözüm açıkça Fikir 6'ya dayanıyor fakat bu durumda yuvarlanan bir silindirin kinetik enerjisinin hesaplanması gerekiyor.

**Fikir 61:**  $K = K_c + M_{\Sigma}v_c^2/2$ , burada  $K_c$  kütle merkezi referans sisteminde sistemin kinetik enerjisi ve  $M_{\Sigma}$  da sistemin toplam kütesidir. Benzer biçimde:  $\vec{P} = M_{\Sigma}\vec{v}_c$  ( $\vec{P}_c \equiv 0$  olduğundan dolayı) ve açısal momentum da  $\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{r}_c \times \vec{P}$ 'dir. Paralel eksenler (Steiner) Teoremi bu durumda uygulanabilir:  $I = I_0 + M_{\Sigma}a^2$ , burada  $I$  bir  $s$  eksenine göre sistemin eylemsizlik momenti ve  $I_0$  da sistemin kütle merkezinden geçen ve  $s$  eksenine paralel olan bir eksene göre eylemsizlik momentidir.  $a$  ise birbirine paralel olan bu iki eksen arasındaki mesafedir.

Bundan sonraki problemde zaten açısal momentumu hesaplamamız gerekecek, dolayısıyla işleri biraz açıklayalım:

**Fikir 62:** Açısal momentum toplanabilir. Sistemi noktasal kütlelere bölerek açısal momentumu  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$  olarak ifade edebiliriz;  $i$ 'nci noktasal cisim için  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  (genel olarak) veya  $L_i = h_i p_i = r_i p_{ti}$  (bir düzlemdeki hareket incelenirken),  $h_i = r_i \sin \alpha_i$  düzlemle cisim arasındaki en kısa mesafedir ve  $p_{ti} = p_i \sin \alpha$  momentumun teğet bileşenidir. *Kinetik enerji, momentum vb. de toplanabilir özelliklerdir.*

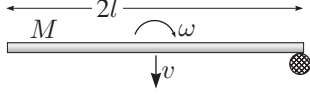
Eğer ki açısal momentum üç boyutlu bir uzayda vektörse bir düzlemdeki hareket incelenirken bu vektör düzleme diktir ve dolayısıyla skaler bir nicelik gibi davranır (dolayısıyla vektörel çarpımlar yapılmaz). Genelde Fikir 61 ve 62'yi bir arada kullanmak faydalı olur: sistemi parçacıklara değil rijit cisimlere ( $L = \sum L_i$ ) böler ve Fikir 61'e göre her bir cismin eylemsizlik momenti  $I_i$ 'yi hesaplarız: kütle merkezinin eylemsizlik momenti ve kütle merkezi referans sistemine göre hesaplanan eylemsizlik momentinin toplamı.

**Fikir 63:** Birkaç sık kullanılan cismin kütle merkezlerine göre eylemsizlik momentleri şunlardır;  $l$  uzunluğundaki bir çubuk:  $\frac{1}{12}Ml^2$ , katı bir küre:  $\frac{2}{5}MR^2$ , küresel kabuk:  $\frac{2}{3}MR^2$ , silindir:  $\frac{1}{2}MR^2$ , eksenine düzlemine dik olan ve kenar uzunlukları  $a$  olan bir kare:  $\frac{1}{6}Ma^2$ .

Eğer dönme eksenini kütle merkezinden geçmiyorsa ( $a$ ) gerekli eksene göre eylemsizlik momenti paralel eksenler (Steiner) Teoremi kullanılarak bulunabilir; ( $b$ ) Fikir 61 kullanılarak kinetik

enerji veya açısal momentum hesaplanabilir (bu durumda yalnızca kütle merkezine göre eylemsizlik momentinin bilinmesi yeterli olur.) .

**pr 45.**  $M$  kütleli,  $2l$  uzunluğundaki bir çubuk buzun üstünde kaymaktadır. Çubuğun kütle merkezinin hızı  $v$ , çubuğun açısal hızı  $\omega$  'dır. Kütle merkezinin hızının çubuğun kendisine dik olduğu bir anda çubuğun uçlarından biri hareketsiz bir direğe çarpar. (a) Eğer çarpışma tam inelastikse (direğe çarpan uç çarptığı anda durur.); (b) Eğer çarpışma tam elastikse, çubuğun kütle merkezinin hızı çarpışmadan sonra nedir?



Eğer çarpışma elastikse, gerekli denklemlerden birini enerji korunumundan elde ederiz; fakat çarpışma elastik değilse çubuğun hareketsiz uçlarından biriyle ilgili farklı bir durum oluşur. Yine de iki değişkenimiz var. İkinci denklem şuradan ortaya çıkar:

**Fikir 64:** Eğer bir cisim herhangi bir şeyle çarpırsa çarpışma noktasına göre açısal momentumu korunur.

Gerçekten, çarpışma sırasında cismin hareketi tepki ve sürtünme kuvvetlerinden etkilenir ancak bu kuvvetlerin ikisi de çarpışma noktasından uygulanır: kuvvet kolları bu noktaya göre sıfırdır. Eğer bir cisim yerçekimi ya da benzeri bir alanda hareket ediyorsa, uzun vadede çarpışma noktasına göre açısal momentum değişmeye başlayabilir ancak çarpışmadan hemen önce ve hemen sonra yine de korunur (Yerçekim kuvveti, büyük fakat kısa süre etki eden tepki kuvvetlerine kıyasla çok güçlü değildir. Yerçekim kuvvetinin kuvvet kolu sıfır olmasa da açısal momentumu bir anda (çarpışma anı) değiştiremez.) .

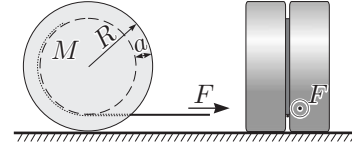
**pr 46.** Eğer bir sopa ile rijit bir cisme —mesela bir elektrik direğine— vurursak; vuruş sopanın darbe merkezini iskaladığı takdirde (yani bu merkezin üstünden veya altından vurulursa) sopayı tutan elimiz acıyabilir. Homojen bir sopanın darbe merkezini bulun. Çarpışma anında sopanın, onu tutan elin etrafında döndüğü kabul edilebilir.

**Yöntem 7:** Gerçek hayattan bir problemi fiziğin ve matematiğin formal dili ile ifade edin -bir diğer deyişle model oluşturun.

Bu şekilde söylendiğinde yöntem çok anlamsız gözükabilir ancak gerçek hayat senaryolarını dönüştürmek ve yorumlamak, yani problemi *modellemek* fiziğin en zorlayıcı ve ilgi çekici yönlerinden biridir. Bu ilgi çekicidir; çünkü hazır bir modeli iyice anlaşılmalı fikirleri kullanıp çözmekten daha fazla yaratıcı özgürlük sağlar. Yine de, özgürlüğün sınırları vardır: model gerçeği olabildiğince iyi yansıtmalıdır, yaklaşımlar mantıklı olmalıdır ve, son olarak, modelin zihnen veya bir bilgisayar yardımı ile çözülebilir olması tercih edilir. Verilen bir soruda problem basitleştirilmiştir ve çok da bir özgürlüğümüz yoktur: mantıklı yaklaşımları açıkça belirten ipuçları vardır. Şimdi sorumuzu modellemeye başlayalım: “Uzunluğu  $l$  olan homojen ve sert bir çubuk, bir ucu etrafında  $\omega$  açısal hızı ile dönmektedir. Dönme eksenini çubuğa diktir. Bu eksenin  $x$  uzak-

lıkta hareketsiz bir direk dönme eksenine paralel olarak durmaktadır. Çubuk direğe vuruyor.” Burada karşımıza ilk engel çıkıyor: Çarpışma elastik mi inelastik mi? Soruda buna değinilmemiş. Şimdilik bunu bir kenara bırakalım, belki de buna ihtiyacımız olmayacaktır (ki ihtiyacımız olmayacağını göreceğiz.). Şimdi asıl problem ile karşılaşacağız: Elin “acı maması” ne demektir? Elimize bir şey çarparsa, yani bu bir şey kısa bir zaman aralığında (çarpışma) elimizden bir impuls alırsa, acıyacağımızı biliyoruz. Çünkü bu büyük bir kuvvet anlamına gelir. El hareketsizdir, dolayısıyla sopanın elle tutulan ucu elden herhangi bir impuls almadan durmalıdır. Böylelikle sorumuzun modellemesi tamamlanmış olur: “Darbe ardından dönme tersine çevrilir, yani  $0 \geq \omega' \geq -\omega$ ; ayrıca çarpışma boyunca dönme eksenini çubuğa herhangi bir impuls aktarmaz.  $x$ 'i bulunuz.” Sondan bir önceki cümle Fikir 64'ün kullanılmasını ima eder.

**pr 47.** Yarıçapı  $R$  ve kütlesi  $M$  olan büyük bir silindir zeminde durmaktadır. Derinliği  $a$  olan dar bir oyuk silindirin çevresi boyunca oyuluyor. Bir ip bu oyuga sarılıyor ve serbest ucundan yatay olacak şekilde  $F$  kuvveti ile çekiliyor. Silindir, ip silindirin altından açılacak şekilde yerleştiriliyor. Silindir hangi ivme ile harekete başlayacak? Silindir ve zemin arasındaki sürtünme kuvveti kayma olmayacak kadar fazladır.



Bu problemi ele almak için bir çok yol var ama biz aşağıdaki fikri kullanalım.

**Fikir 65:**  $I\varepsilon = M$  bağıntısı sadece dönme merkezi hareketsiz olduğunda geçerlidir; ancak bu bağıntının, cismin ani dönme ekseninin, kütle merkeziyle arasındaki mesafeyi hiç değiştirmeden ötelendiği durumlarda da (örn. dönen silindirik veya küresel cisimler) geçerli olduğu görülmektedir.

Bu fikri ispatlamak için Fikir 6'yı hatırlayalım: iş yapıldığında kinetik enerji oluşur,  $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = M\varphi$  ( $\varphi$  cismin dönme açısı ve  $\omega = d\varphi/dt$ ). Eğer ani dönme eksenine göre eylemsizlik momenti  $I$  zamana bağlı değişmiyorsa,  $dK/dt = \frac{1}{2}I d\omega^2/dt = I\omega\varepsilon = dM\varphi/dt = M\omega$  olur. Buradan da  $I\varepsilon = M$  eşitliğine ulaşılır.

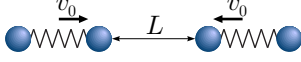
**pr 48.** Bir top  $x < 0$  bölgesinde  $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$  hızı ile yatay bir zeminde yuvarlanmaktadır.  $x > 0$  bölgesinde ise  $\vec{u} = (0, u)$  hızı ile hareket eden taşıyıcı bir bant bulunmaktadır ( $x = 0$  kenarına paralel). Top bantın üzerine yuvarlandıktan sonra banta göre topun hızı  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ 'yi bulunuz. Bantın yüzeyi serttir (top kaymıyor) ve bant zemin ile aynı seviyededir.

**Fikir 66:** Yatay bir yüzeyde yuvarlanan silindirik veya küresel cisimlerin açısal momentumu yüzey düzlemindeki rastgele bir eksene göre korunur.

Aslında, tepki kuvvetinin ve kütle çekiminin uygulandığı noktalar kuvvetlerin kendileri ile aynı düz çizgide bulunur ve bu kuvvetlerin toplamı sıfırdır, dolayısıyla oluşturdukları net tork da sıfırdır. Sürtünme kuvveti yüzey düzleminde bulunduğu için onun aynı düzlemde bulunan bir eksene göre kuvvet kolu

sıfır olur.

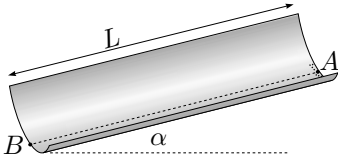
**pr 49.** Bir “yay dambılı”  $k$  sertliğinde yay ile birbirine bağlanmış  $m$  kütleli iki toptan oluşuyor. Bu şekilde olan iki dambıl birbirlerine doğru  $v_0$  hızı ile hareket ediyorlar. Belirli bir anda aralarındaki mesafe  $L$  oluyor (şekle bakınız). Ne kadar süre sonra aralarındaki mesafe yeniden  $L$  olur? Çarpışmalar mükemmel elastiktir.



**Fikir 67:** Eğer yaylarla, iplerle vb. bağlanmış elastik cisimler içeren bir sistem, başka cisimlerle etkileşiyorsa elastik cisimlerin etkileşme süresi sistemdeki diğer karakteristik süreçlerden çok daha kısadır. Bütün süreç daha basit kısımlara ayrılabilir: elastik cisimler arasında neredeyse anlık gerçekleşen bir çarpışma (serbestmiş gibi düşünülebilir, yani yayın uyguladığı kuvvet elastik çarpışmada uygulanan kuvvetlere göre önemsizdir.) ve sonraki (önceki ya da çarpışmalar arasındaki) yavaş süreç: yayın titreşmesi vs.

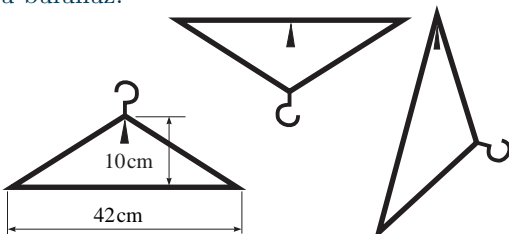
*Not:* Bu aslında daha genel bir fikirdir, eğer dinamik bir sistemde çok hızlı (nerdeyse ani) süreçler gerçekleşebilirse bütün süreci basit adımlara bölmek yararlı olabilir; bunun bir örneği için sıradaki probleme bakınız (ayrıca Fikir 53’ü hatırlayınız).

**pr 50.** Küçük kum tanecikleri sürtünme olmaksızın  $R$  yarıçaplı bir oluk boyunca kaymaktadır (şekle bakınız). Oyuğun eğim açısı  $\alpha$ ’dır. Bütün kum taneciklerinin ilk hızı sıfırdır ve  $A$  noktasının yakınında harekete başlarlar (ama tam olarak  $A$  noktasında başlamak zorunda değiller). Bütün kum taneciklerinin  $B$  noktasından (yani tam olarak oluğun en altından) çıkması için oluğun uzunluğunun ne olması gerekir?



**Fikir 68:** Eğer yayılmış bir parçacıklar bütününe hareketi bilinen bir yönde titreşim olan ve başka bir yönde de olmayan kısımlara ayrılabilirse (buradaki hareket titreşime diktir), o zaman parçacıklar belirli noktalarda toplanırlar: bütün parçacıkların titreşim fazının sıfır ya da  $2\pi$ ’nin bir tam sayı katı olduğu yerlerde.

**pr 51.** Kütleli homojen dağılmamış çubuklardan yapılmış bir mont askısı, sayfa düzleminde küçük genlikli salınımlar yapmaktadır. İlk iki durumda üçgenin uzun kenarı yataydır. Şekilde gösterilen üç durumda da mont askısı aynı periyot ile titreşiyorsa bu titreşim periyodunu ve askının kütle merkezinin konumunu bulunuz.



#### 4. DİNAMİK

*Bilgi:* Belli bir eksene göre salınımlar yapan sınırlı boyuta sahip rijit cisimlere genel olarak fiziksel sarkaç denir. Herhangi bir fiziksel sarkacın titreşim frekansı,  $I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$ , tork denklemini kullanılarak kolayca çıkarılabilir. Burada  $I$  salınım eksenine göre eylemsizlik momenti,  $l$  ise kütle merkezinin eksene olan mesafesidir. Denklem çözülüp paralel eksen teorimi kullanılarak şu eşitliğe ulaşılabilir:  $\omega^{-2} = I/mgl = I_0/mgl + l/g$  61. Buradaki  $\tilde{l} = l + I_0/ml$  uzunluğu fiziksel sarkacın indirgenmiş uzunluğu olarak tanımlanabilir. Bu uzunluk, fiziksel sarkacın periyodu aynı uzunluğa sahip matematiksel bir sarkacın periyoduna eşit olacak şekilde tanımlanmıştır.

**Fikir 69:** Eğer kütle merkezinden geçen  $\tilde{l}$  uzunluğunda düz bir çizgi çizersek ve çizdiğimiz bu çizginin uçlarından biri dönme ekseninden geçiyorsa dönme eksenini çizginin diğer ucuna taşıdıgımızda (ve cismin kararlı dengeye gelmesini beklediğimizde) yeni titreşimin frekansı bir önceki durumla aynı olacaktır. Sonuç: Titreşimin frekansını sabit tutmak kaydıyla dönme eksenini yerleştirebileceğimiz noktalar kümesi kütle merkezi etrafındaki iki eş merkezli çemberden meydana gelir.

*İspat:* Yukarıdaki formül bilinen bir  $\omega$  frekansına (başka bir deyişle bilinen bir indirgenmiş uzunluk  $\tilde{l} = g/\omega^2$ ’ye) karşılık gelen  $l$  uzunluğunu bulmak için karesel bir denklem olarak yazılabilir:  $l^2 - \tilde{l}l + I_0/m = 0$ . Viet Formüllerine göre, eğer eşitliğin kökleri  $l_1$  ve  $l_2$  ise  $l_1 + l_2 = \tilde{l}$  dolayısıyla  $l_1$  ve  $l_2 = \tilde{l} - l_1$  uzunlukları için titreşim frekansı aynıdır.

**pr 52.** 2 mm yarıçaplı, yoğunluğu  $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$  olan metalik bir küre suyun içinde  $a_0 = 0,57g$  ivmesiyle serbest olarak düşmektedir. Suyun yoğunluğu  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ’tür. Yarıçapı 1 mm olan küresel bir baloncuk suda ne kadarlık bir ivmeyle yükselir? Akışın iki durumda da laminar olduğunu varsayınız; sürtünmeyi ihmal edin.

**Fikir 70:** Eğer bir cisim bir sıvının içerisinde hareket ediyorsa aynı zamanda sıvı da hareket edecektir. (A) Eğer akış laminar (türbülans yoksa) yalnızca cismin bitişiğindeki sıvı hareket eder. (B) Eğer akış türbülanslıysa cismin arkasında türbülanslı “akış izi” oluşur. İki durumda da hareket eden sıvının karakteristik hızı cismin hızıyla aynı olacaktır.

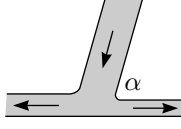
Yöntem 6’yı kullanarak (A) durumunda sistemin kinetik enerjisinin  $K = \frac{1}{2}v^2(m + \alpha\rho_0V)$  olduğunu buluruz; burada  $\alpha$  sabiti, sıvının ne kadarlık bir bölgesinin (cismin hacmine kıyasla) hareket edeceğine denk gelen cisim geometrisini karakterize eden bir sayıdır. Bu ifade, cismin etrafındaki sıvının karakteristik hızının  $v$  olduğuna dikkat ederek ve sıvının hareket ettiği bölgenin (Hızı  $v$ ’den çok da küçük değildir.) karakteristik boyutunun cismin boyutuyla hemen hemen aynı olduğu yaklaşımıyla elde edilebilir. Bir cismin üzerine  $F$  kuvveti etki ediyorsa bu kuvvet tarafından oluşturulan güç  $P = Fv = \frac{dK}{dt} = va(m + \alpha\rho_0V)$  olarak verilir. Bu sebeple  $F = a(m + \alpha\rho_0V)$ : cismin etkin ağırlığı  $\alpha\rho_0V$  kadar artar. Yukarıdaki problemde küresel cisim için  $\alpha$  sabiti problemin ilk yarısında verilen koşullar kullanılarak bulunabilir.

(B) durumunda ise cismin hızının sabit olduğunu varsayımıyla  $K = \frac{1}{2}v^2\rho_0(\alpha Svt)$  olduğunu buluruz; burada  $S$  cismin kesit alanı,  $\alpha S$  ise türbülanslı “akış izi”nin kesit alanıdır.  $\alpha$  burada da cisim karakterize eder. Bunu kullanarak  $Fv = \frac{dK}{dt} =$

## 5. TEKRAR PROBLEMLERİ

$\frac{\alpha}{2}v^3\rho_0S$  olduğu kolayca bulunabilir ki bu da  $F = \frac{\alpha}{2}v^2\rho_0S$  olduğunu verir.

**pr 53.** Bir su akıntısı bir oluğun altına doğru  $v$  hızıyla akar ve biri sağa biri sola giden iki küçük akıntıya ayrılır. Gelen akıntıyla oluk (ve küçük akıntılar) arasındaki açı  $\alpha$  olduğuna göre iki akıntının da hızlarını bulunuz. İki akıntıda da birim zamanda taşınan su miktarının oranını bulunuz.



Bu oldukça zor bir problemdir. Öncelikle birkaç yeni fikir ve olguyu açıklayalım.

**Fikir 71:** Bir sıvı akışı için Bernoulli Yasası (başka bir deyişle enerji korunumu) sıklıkla kullanışlıdır:  $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{Sabit}$ ; burada  $p$  statik basınçtır,  $h$  söz konusu noktanın yüksekliğidir ve  $v$  o noktadaki akış hızıdır.

**Olgu 30:** Sıvının içinde, serbest yüzeyinin yakınlarda statik basınç dış basınca eşittir.

Sorunun ikinci kısmını çözmek için de şuna ihtiyaç duyulur:

**Fikir 72:** Fikir 46, açık sistemler için de geçerli olacak şekilde genelleştirilebilir (belli bir miktar madde sisteme girer ve çıkar):  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Phi}_{P_{in}} - \vec{\Phi}_{P_{out}}$ , burada  $\vec{\Phi}_{P_{in}}$  ve  $\vec{\Phi}_{P_{out}}$  giren ve çıkan momentum akılarıdır (Bir diğer deyişle, sırasıyla sisteme giren ve çıkan maddenin net momentum akılarıdır.).

Akan sıvının momentum akısı, hacimsel momentum yoğunluğu  $\rho\vec{v}$  ile akış hızının (birim zamanda sisteme giren/çıkan sıvı hacmi) çarpımıdır.

Bu durumda incelememiz gereken açık sistem ne peki? Tabii ki sisteme giren  $\mu$  (kg/s) ve sistemden çıkan  $\mu_l$  ve  $\mu_r$  akış hızları arasında yukardaki formülü kullanarak ilişki kurabileceğimiz bir sistem olmalı: uzayın küçük ve akışım ikiye bölündüğü noktayı içeren hayali bir bölgesi.

**Olgu 31:** Eğer viskositeyi ihmal edebilirsek, akış yatağı tarafından (akışı sınırlayan duvarlar da dahil) akışa uygulanan kuvvetin duvarlara paralel bileşeni sıfır olur.

**pr 54.** Sığ sulardaki küçük dalgaların yayılma hızını bulun. Su, eğer dalga boyu  $H$  derinliğinden çok daha büyükse sığ kabul edilir. Bunun sayesinde, dikey bir kesit boyunca bütün taneciklerin yatay hızının,  $v_h$ , aynı olduğunu ve dikey hızlarının, yatay hızlarından çok daha küçük olduğunu varsayabiliriz. Dalgaların küçüklüğü, yüksekliklerinin suyun derinliğine göre çok daha küçük olduğu anlamına gelir. Böylece, su moleküllerinin yatay hızının dalga hızı  $u$ 'dan çok daha küçük olduğunu varsayabiliriz.

**Fikir 73:** Dalganın durgun olduğu bir referans sistemi seçmek, dalganın (veya sürekli şekle sahip başka bir yapının) yayılma hızını (veya başka bir özelliğini) bulmak için yaygın bir yöntemdir. Bu referansta, (a) süreklilik (Fikir 59) ve (b) enerji korunumu (mesela Bernoulli Yasası şeklinde) geçerlidir. Bazı durumlarda enerji korunumu yerine kuvvet dengelerinin kullanılması gerekebilir.

(Bir diğer yaklaşım ise birleşik bir kısmı diferansiyel denklem sistemini lineerleştirip çözmektir.)

**pr 55.** Kütleli  $m = 1$  g olan küçük bir küre pürüzsüz bir yüzey üzerinde  $v_0 = 10$  m/s ilk hızı ile harekete başlıyor. Bir duvar ile  $M = 1$  kg kütleli bir blok arasında sürekli gidip gelerek ve esnek çarpışmalar yaparak hareketine devam ediyor. Duvar ile kürenin arasındaki mesafe başlangıçtaki mesafenin iki katına çıktığı anda kürenin hızı nedir? Küre tarafından duvara uygulanan ortalama kuvvet (zamana göre) kaç kat değişecek?

**Fikir 74:** Eğer sistemin parametrelerinin titreşim periyoduna kıyasla yavaş değiştiği titreşim benzeri bir hareket yaşanırsa adyabatik invaryant  $I$  korunur. Adyabatik invaryant, faz uzayında (koordinatların uzaysal koordinat  $x$  ve momentum  $p_x$  olduğu diyagram) sistemin yörüngesinin çizdiği kapalı kontörün alanıdır.

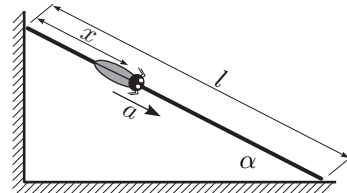
Burayı daha titiz inceleyelim. Sistemin bir tam  $T$  periyodu boyunca hareketini takip ettiğimizde kapalı kontur bir  $x(t), p_x(t)$  parametrik eğrisi (diğer adıyla faz yörüngesi) şeklinde olur. Faz yörüngesi çizilirken normalde hareketin yönünü belirten bir okla beraber çizilir. Adyabatik invaryant tam mükemmel bir biçimde korunmaz fakat korunma hassaslığı  $\tau/T$  oranının büyümesi ile beraber artar, burada  $\tau$  sistemin parametrelerinin değişiminin karakteristik zamanını belirtir.

Adyabatik invaryant fizikte çok önemli bir rol oynar: gazların adyabatik yasasından (bir önceki problemin cevabını bir serbestlik derecesine sahip bir ideal gazın adyabatik genişleme yasası ile karşılaştırınız!) kuantum mekaniğine (sistemdeki kvantlı <sup>33</sup> madde sayısı —örneğin fotonlar— parametrelerin yavaş değiştiği durumda korunur.) kadar birçok alanda kullanılır.

## 5 TEKRAR PROBLEMLERİ

**pr 56.** Düz, homojen bir çubuk dik bir duvara, duvarla çubuk arasındaki açı  $\alpha < 90^\circ$  olacak şekilde yaslanmaktadır. Bu şekilde yaslandığında hangi  $\alpha$  değerleri için çubuk hareketsiz kalır? İki durum ele alın: a) duvar kaygandır ve zeminin sürtünme katsayısı  $\mu'$ 'dir; b) zemin kaygandır ve duvarın sürtünme katsayısı  $\mu'$ 'dir.

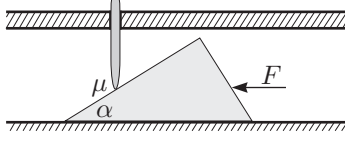
**pr 57.** Kütleli bir çubuk, bir ucu dik bir duvara doğru yaslanmış diğer ucu ise yatay bir zeminin üzerinde olacak şekilde hareketsiz durmaktadır. Bir böcek çubuğun üstünden altına doğru inmek istemektedir. Böceğin ivmesi çubuğun üst ucundan olan uzaklığına nasıl bağlıdır? Böceğin kütleli  $m$  ve çubuğun uzunluğu  $l$ 'dir, zeminle çubuk arasındaki açı  $\alpha$ 'dır ve çubuğun kütleli ihmal edilebilir. Zemin de duvar da kaygandır yani sürtünme katsayıları  $\mu = 0$  'dır. Böceğin yukarıdan (başlangıçta hareketsizse) aşağı inmesi ne kadar sürer?



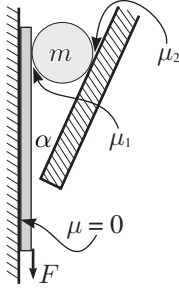
<sup>33</sup>İngilizce: quanta

5. TEKRAR PROBLEMLERİ

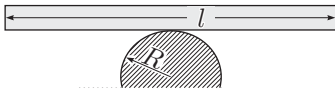
**pr 58.** Bir ucundaki açısı  $\alpha$  olan bir takoz yatay bir zeminin üzerinde durmaktadır. Tavanda duvarları pürüzsüz olan bir delik vardır. Bir çubuk bu deliğin içerisine eksenini dikeye sabitlenmiş olarak rahatça yukarı aşağı hareket edebilecek şekilde yerleştirilmiştir. Çubuk takoz tarafından desteklenmektedir; sürtünmenin olduğu tek nokta takozla çubuğun temas noktasıdır. Temas noktasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ 'dur.  $\mu$ 'nun hangi değerleri için yalnızca yeterince büyük yatay bir kuvvet uygulayarak takoz çubuğun arkasına doğru itilebilir?



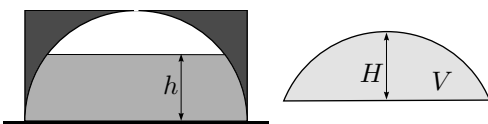
**pr 59.** Bazen mekanizmalar resim vb. duvara asmak için kullanılır, modellemesi aşağıda açıklanacaktır. Dikey sabitlenmiş bir yüzeyle arasındaki açı  $\alpha$  olacak şekilde eğilmiş hareket-siz bir düzlem bulunmaktadır. Yüzeyle düzlem arasında küçük bir plaka sığacak kadar boşluk vardır. Plaka dikey yüzeye sıkıca yerleştirilir; aralarındaki sürtünme katsayısı sıfır alınabilir. Plaka ve düzlem arasına  $m$  kütleli serbestçe hareket edebilen bir silindir eksenini yatay ve tüm yüzeylere paralel olacak şekilde yerleştirilir. Silindir, plaka ve düzleme dayanır ve bu iki yüzeyle sürtünme katsayıları sırasıyla,  $\mu_1$  and  $\mu_2$  olarak bilinmektedir. Plakanın ağırlığı ne olursa olsun plakanın düşmemesi için bu iki sürtünme katsayısı ne kadar olmalıdır?



**pr 60.** Uzunluğu  $l$  ve kalınlığı  $h$  olan tahta, eksenini yatay olan bir silindirin üzerine yerleştiriliyor. Tahtanın yatay konumunun kararlı olması için silindirin yarıçapı  $R$  ne kadar olmalıdır?

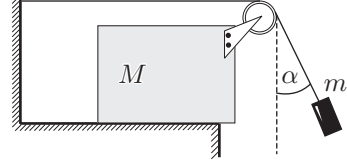


**pr 61.** Yüksekliği ve yarıçapı eşit olup  $R$  değerinde olan silindir şeklindeki bir kabın içindeki boşluk yarı küre şeklindedir. Kap, ağzına kadar su ile doldurulup ters çevriliyor ve yatay bir yüzeye yerleştiriliyor. Yarı küre şeklindeki boşluğun yarıçapı da  $R$  olup kabın en altında ufak bir delik vardır. Serbestçe duran kabın kenarları altından su sızıyor. Eğer kabın kütlesi  $m$  ve suyun yoğunluğu  $\rho$  ise geriye kalan su tabakasının yüksekliği ne kadar olacaktır? Eğer gerekirse bir küre parçasının (şekle bakınız) hacim formülünü kullanabilirsiniz:  $V = \pi H^2(R - H/3)$ .

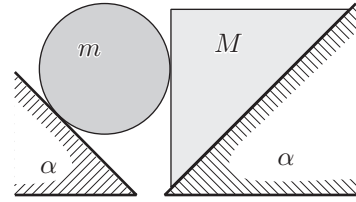


**pr 62.**  $R$  yarıçaplı dikey bir silindir eksenine göre  $\omega$  açısal hızı ile dönmektedir. Eksendeki su yüksekliği ile kabın kenarlarının hemen yanında su yüksekliği arasındaki fark ne kadardır?

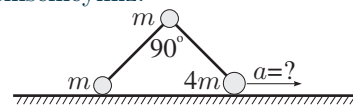
**pr 63.**  $M$  kütleli bir blok, kaygan yatay bir yüzeyde bulunmaktadır. Bloğun bir köşesinden bir ip geçiriliyor. İpin bir ucu duvara diğer ucu ise dikeye  $\alpha$  açısı yapacak şekilde yerleştirilmiş  $m$  kütleli küçük bir bloğa bağlanmıştır. En başta ip gergindir ve bloklar yerlerinde tutulmaktadır. Ardından bloklar serbest bırakılıyor.  $\alpha$  açısının sonraki hareket boyunca sabit kalması için kütlelerin oranı ne olmalıdır?



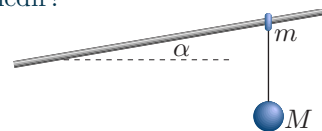
**pr 64.** İki tane eğim açıları  $\alpha$ 'ya eşit kaygan ( $\mu = 0$ ) eğik düzlem; tabanları paralel, eğimli yüzeyleri birbirlerine bakacak ve aralarında biraz boşluk olacak şekilde konulmuştur (şekle bakınız). Eğik yüzeylerin üstünde bir silindir, bir de takoz şeklinde bir cisim vardır. Bu iki cisim birbirlerine yaslanmaktadır ve takoz şeklindeki cismin bir yüzeyi yatay olacak şekilde hareketsizdir. Cisimlerin kütleleri, sırasıyla,  $m$  ve  $M$ 'dir. Silindir ve takoz hangi ivmelerle hareket edecektir? Cisimlerin arasındaki etkileşim kuvvetini bulunuz.



**pr 65.** Üç küçük silindir birbirlerine ağırlıksız çubuklarla bağlıdır. Ortadaki silindirin yakınında bir menteşe vardır, böylece çubuklar arasındaki açı serbest bir şekilde değişebilir. Başlangıçta bu açı dik açıdır. Silindirelerden ikisinin kütlesi  $m$ 'dir, kenardaki diğer silindirin ise kütlesi  $4m$ 'dir. Hareket başladıktan hemen sonra ağır olan silindirin ivmesini bulunuz. Sürtünmeyi önemsemeyiniz.



**pr 66.** Kaygan bir çubuk yatay ile  $\alpha$  açısı yapacak şekilde konumlanmıştır. Üstüne uzun bir ip bağlanmış olan  $m$  kütleli bir yüzük çubuk boyunca kayabilmektedir.  $M$  kütleli küçük bir küre ipe bağlanmıştır. Başlangıçta yüzük hareketsiz olarak tutulmaktadır ve ip dikey durmaktadır. Sonrasında yüzük serbest bırakılıyor. Hareket başladıktan hemen sonra kürenin ivmesi nedir?



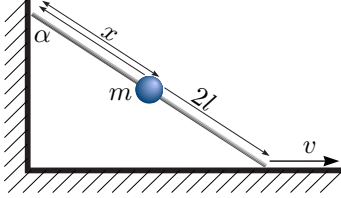
**pr 67.** Bir blok küresel bir yüzeyin tepe noktasından kay-



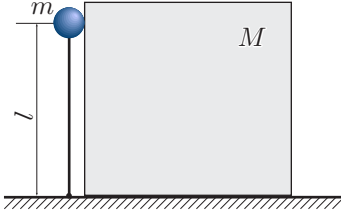
5. TEKRAR PROBLEMLERİ

maya başlıyor. Yüzeyle temasını kaybedeceği yüksekliği bulunuz. Küre sabit durmaktadır ve yarıçapı  $R$ 'dir, sürtünme yoktur.

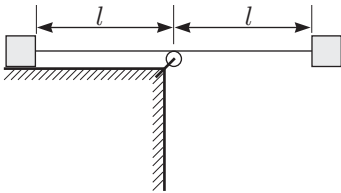
**pr 68.** Ağırlıksız bir çubuğun uzunluğu  $2l$ 'dir.  $m$  kütleli küçük bir küre çubuğun üst ucundan  $x = l$  uzaklığa sabitlenmiştir. Çubuk, bir ucu duvara dayalı diğer ucu da yerde olacak şekilde hareketsizdir. Çubuğun yerdeki ucu sabit  $v$  hızı ile duvardan uzağa doğru hareket ettiriliyor. a) Çubuk ile duvar arasındaki açı  $\alpha = 45^\circ$  olduğu zaman kürenin çubuğa uyguladığı kuvveti bulunuz, b) eğer  $x \neq l$  ise cevap nedir?



**pr 69.**  $l$  uzunluğunda hafif bir çubuk yatay yüzeye bir menteşe ile bağlanmıştır ve çubuğun ucuna  $m$  kütleli küçük bir küre konulmuştur. İlk olarak çubuk dikeydir ve küre  $M$  kütleli bloğa yaslanarak durmaktadır. Sistem serbest bırakılıyor ve belli bir zaman sonra küre bloğun yüzeyiyle olan temasını kaybediyor – bu anda çubuğun yerle yaptığı açı  $\alpha = \pi/6$ 'dır. Cisimlerin kütleleri arasındaki  $M/m$  oranını ve bloğun temasını kopuş anındaki hızı  $u$ 'yu bulunuz.



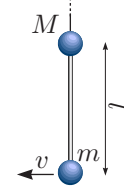
**pr 70.** Bir masanın kenarından  $l$  uzaklıkta hareketsiz olan bir blok, bir ip ile başka bir özdeş bloğa bağlanmıştır. İpin uzunluğu  $2l$ 'dir ve masanın kenarında olan bir makaranın üzerinden geçirilmiştir. Diğer blok, masanın üstündeki blokla aynı yükseklikte ipi gerekir şekilde tutulmaktadır. Sonrasında ikinci blok serbest bırakılıyor. Hangisi daha önce gerçekleşir: İlk blok makaraya mı ulaşır yoksa ikinci blok masaya mı çarpar?



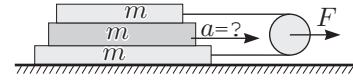
**pr 71.** Düzgün yoğunluklu ve kalınlıklı silindirik bir hokey pakına  $\omega$  açısal hızı ve  $u$  öteleme hızı verilmiştir. Eğer buz her yerde aynı kayganlıktaysa hokey pakı nasıl bir yörünge izler? Pah, hangi durumda daha uzağa gider:  $u$ 'nun iki durumda da aynı olduğunu varsayarsak,  $\omega = 0$  olduğunda mı yoksa  $\omega \neq 0$  olduğunda mı?

**pr 72.**  $M$  kütleli küçük bir küre çok uzun bir ipin ucuna asılıdır. Bu cismin ucuna ağırlıksız bir çubukla başka bir küçük  $m$  kütleli küre bağlanmıştır. Çubuğun uzunluğu  $l$ 'dir. Başlangıçta sistem dengededir. Aşağıdaki kürenin yukarıdaki

küreyle aynı yüksekliğe çıkması için aşağıdaki küreye verilmesi gereken ilk yatay hız nedir? Kürelerin boyutları çubuğun uzunluğuna kıyasla ihmal edilebilir.

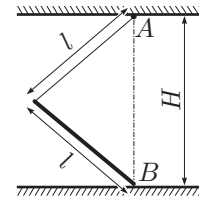


**pr 73.** Kütleli  $m$  olan bir blok, kaygan ve yatay bir yüzeyde bulunmaktadır. Üstünde  $m$  kütleli bir blok daha durmaktadır, onun üstünde ise bir tane daha. Birinci ve üçüncü bloğu bağlayan bir ip kütleli bir makaradan geçirilmiştir. İpler yatay durmakta ve makara  $F$  kuvveti ile çekilmektedir. İkinci bloğun ivmesi ne olacaktır? Bloklar arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ 'dur.



**pr 74.** Kütleli  $m$  olan bir çocuk, kütleli  $M (> m)$  olan ve buz üzerinde duran başka bir çocuğu itmek istiyor. Bu amaçla  $m$  kütleli çocuk hızlanıyor, diğerine doğru koşmaya başlıyor ve onu itiyor (ayakta durabildikleri süre boyunca). Bu şekilde bir itmeyle gidilmesi mümkün olan maksimum mesafeyi bulun. Koşu sırasındaki maksimum hız  $v$ , çocuklar ile buz arasındaki sürtünme katsayısı ise  $\mu$  olarak bilinmektedir.

**pr 75.** Homojen yoğunluklu  $l$  uzunluklu bir çubuk; kütleli,  $l$  uzunluklu bir ip ile tavadaki  $A$  noktaya tutturulmuştur. Çubuğun altta kalan ucu,  $A$  noktasının tam altında bulunan  $B$  noktasına dayanmaktadır.  $B$  noktası kaygan bir zeminde bulunmaktadır.  $AB$  doğru parçasının uzunluğu  $H$ 'tır,  $l < H < 2l$  eşitsizliği geçerlidir. Çubuk hareketsizken kaymaya başlıyor, bu hareket boyunca çubuğun kütle merkezinin maksimum hızını bulun. Ayrıca çubuğun kütlesi  $m$  ise hızın maksimum olduğu bu anda çubuğun kütle merkezinin ivmesini ve ipteki gerilme kuvvetini bulun.

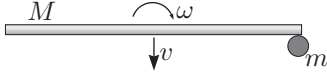


**pr 76.** Homojen yoğunluklu bir çubuğun bir ucu yere, diğer ucu ise duvara dayanmaktadır. Çubuk ilk anda dikey durmaktadır ve ardından kaymaya başlıyor. Öyle ki, bütün hareket duvarın ve zeminin kesiştiği çizgiye dik bir düzlemde gerçekleşiyor. Çubuğun duvarla temasının kesildiği anda çubuk ile duvar arasındaki açığı bulun. Sürtünmeyi ihmal edin.

**pr 77.** Kütleli  $M$  olan bir kütük buz üzerinde dönerek kaymaktadır. Kütüğün kütle merkezinin hızı  $v$ , açısal hızı ise  $\omega$ 'dır. Kütük ile kütüğün kütle merkezinin hızının birbirine dik olduğu anda kütük  $m$  kütleli durgun bir hokey pakına çarpıyor. Kütlelerin hangi  $M/m$  oranı için kütüğün yerinde kaldığı ve pakın kayarak uzaklaştığı durum mümkündür? Çarpışmalar

5. TEKRAR PROBLEMLERİ

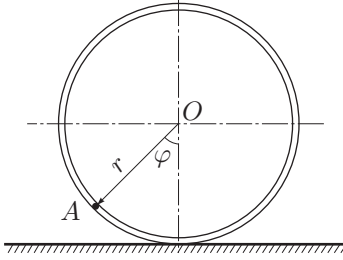
tamamen elastiktir. Kütük düzdür ve çizgisel yoğunluğu sabittir.



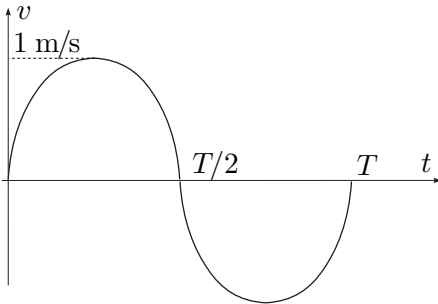
**pr 78.** İlk anda yatay hızı  $v_0$  olan ve dönmeyen bir top,  $h$  yüksekliğinden düşüyor. a) Topun zemin ile çarpışması sırasında deformasyonunun tamamen elastik olduğu, ancak aralarında sürtünme olduğu ve topun temas eden kısmının durduğu durum için topun çarpışmadan sonraki hızını ve açısal hızını bulun. b) Aynı soruyu bu sefer de temasa geçen yüzeylerin göreceli hızlarının hiçbir zaman homojenize olmadığını (yani alt noktanın hızının sıfırlanmadığını) varsayarak ve çarpışma süresince  $\mu$  katsayılı bir sürtünme kuvveti olduğu durumda cevaplayınız.

**pr 79.** Bir top, bir eğik düzlemde aşağıya yuvarlanıyor. Topun ivmesini bulun. Eğim açısı  $\alpha$ , top ile eğik düzlem arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu$ .

**pr 80.** Kütlesi  $M$  ve yarıçapı  $r$  olan bir halka kaygan bir zeminde durmaktadır. Halkanın içinden  $m$  kütleli küçük bir bloğun kayabileceği dar ve kaygan bir tünel açılmıştır. İlk durumda bütün cisimler dengededir ve blok halkanın en üst noktasındadır. Halkanın kütle merkezi ile küçük bloğun konumunu birleştiren hayali çizgi ve dikey arasındaki açı  $\varphi$  olduğu anda halkanın kütle merkezinin hızını ve ivmesini bulunuz.



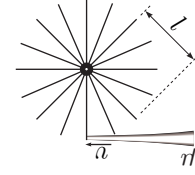
**pr 81.** Kütlesi  $m = 10\text{ g}$  olan bir blok bir zeminin üzerine konuluyor. Bu zeminde sola hareket ederken sürtünme katsayısı  $\mu_1 = 0,3$ , sağa hareket ederse  $\mu_2 = 0,5$ 'tir. Zemin,  $v(t)$  grafiğine göre (şekildeki grafik) durmadan sağa-sola hareket ettiriliyor. Grafik periyodik ve periyodu  $T = 0,01\text{ s}$ 'dir; zeminin hızı  $v$  ise sağa doğru pozitif kabul ediliyor.



Grafiği kullanarak bloğun hareket edeceği ortalama hızı bulun.

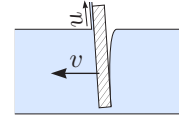
**pr 82.** Bir su çarkı; hafif, düz ve  $l$  uzunluklu çok sayıda tahta parçaları olarak düşünülebilecek küreklerin bir uçlarının dönen bir eksene tutturulmasıyla oluşturulmuştur. Küreklerin serbest uçları su çarkı ile ortak eksenli hayali bir silindirin

yüzeyi üzerinde konumlandırılmıştır. Hızı  $v$ , akış hızı  $\mu$  ( $\text{kg/s}$ ) olan bir akıntı; su çarkına çevresine yakın noktalardan çarpacak şekilde yönelmiştir. Bu çarkın bize sağlayabileceği maksimum kullanılabilir gücü bulun. Kürek sayısının hiçbir su parselinin bir küreğe çarpmadan kaçamayacağı kadar fazla olduğunu varsayın.



**pr 83.**

Düz bir kalasla dikey arasındaki açı  $\alpha$ 'dır. Kalasın uçlarından biri suyun içerisinde diğer ucu ise dışarıdadır. Kalas normaline göre  $v$  hızıyla hareket etmektedir. Buna göre kalas boyunca hareket eden su akıntısının hızı nedir?

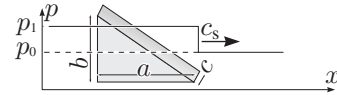


**pr 84.**

Motorlu bir vagon bir yükü yatay bir yolda  $L$  uzunluğu boyunca taşımaktadır. Yük vagonun bir ucuna  $l$  uzunluğunda bir kablo ile bağlıdır (matematiksel sarkaç gibi). Zamanın yarısında vagon sabit bir ivmeyle hızlanmakta diğer yarısında ise sabit bir ivmeyle yavaşlamaktadır. Vagon yolu tamamladığında yükün hareketsiz bir biçimde asılı kalacağı ivme  $a$  değerlerini bulunuz.  $a \ll g$  olduğunu varsayabilirsiniz.

**pr 85.**

Bir şok dalgası hava basıncının bir  $p_0$  değerinden  $p_1$  değerine  $c_s$  hızı ile yayılan süreksiz bir geçişi olarak görülebilir. (a) takoz şeklinde bir bloğun; yüksekliği  $c$  ve tabanı dik kenarlarının uzunlukları  $a$  ve  $b$  olan bir dik üçgen olan  $\rho$  yoğunluklu bir prizmanın; (b) rastgele bir şekle sahip  $V$  hacmindeki  $\rho$  yoğunluklu bir cismin şok dalgasından etkilendiğinde kazanacağı hızı bulunuz.



**pr 86.**

İnce bir çelik çubuk ile bağlanmış olan iki eş elastik küreden oluşan sistem, başka özdeş bir elastik küreye  $v$  hızı ile çarpıyor. Merkezi çarpışma sonucu iki küreden oluşan sistemin hızını bulunuz. Sistemin kinetik enerjisi olay sonunda korunur mu?



**Ek 1: Momentum Korunumu Yasası.**  $N$  noktasal cisimden oluşan bir sistem düşünelim ve her bir  $i$ . cismin üzerine etki eden kuvveti bir toplam olarak ifade edelim,  $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$ . Burada  $\vec{F}_{ij}$   $i$ . cisme  $j$ .<sup>34</sup> cismin uyguladığı kuvettir,  $\vec{F}_i$  ise dış kuvettir, başka bir deyişle sistemin

<sup>34</sup>Olgu 5'e göre  $\vec{F}_{ii} = -\vec{F}_{ii}$ 'dir dolayısıyla  $\vec{F}_{ii} = 0$ : bir cisim kendisine kuvvet uygulayamaz.

## 5. TEKRAR PROBLEMLERİ

parçası olmayan cisimler tarafından uygulanan net kuvvettir. Bu durumda  $i$  'inci cisim için Newton'un 2. Yasası,

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i.$$

olarak verilir. Bu eşitliği  $i$  üzerinden toplarsak eşitliğin sol tarafı

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{P},$$

olur. Burada  $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$  'ye sistemin momentumu denir. Burada  $\vec{F}_{ii} = 0$  olmasından ve türevlemenin toplanabilme özelliğinden yararlandık. Eşitliğin sağ tarafındaki iç kuvvetler birbirlerini sadeleştirir:

$$\sum_i \left( \sum_j \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i>j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0.$$

Burada ilk olarak toplamı  $ij$  indeks çiftleri üzerinden aldık ve ardından simetrik indeksleri ( $ij$  ve  $ji$ ) birlikte grupladık ( $\sum_{i>j}$  toplamın  $i > j$  olan  $ij$  çiftleri üzerinden alındığı anlamına gelir); son olarak da Newton'un 3. yasasını  $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$  eşitliğine ulaşmak için kullanırız. Ardından net dış kuvveti  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  şeklinde tanımlayarak,

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}$$

elde ederiz.

Son eşitlik temelde Newton'un 2. yasasının cisimler sistemine genelleştirilmiş halidir. Özellikle dış kuvvet yoksa  $\vec{F} = 0$  momentum  $\vec{P}$  korunur.

Eğer hiç dış kuvvet yoksa hareket denklemlerinin (sistemin nasıl davranacağını belirleyen denklemler), yani Newton'un 2. yasasını ifade eden denklemler, öteleme simetrisine uymalarına dikkat ediniz: hareket denklemlerinde herhangi bir değişiklik yapmadan referans sistemini  $\vec{a}$  vektörü kadar kaydırabiliriz. Aslında, cisimlerin konumu gösteren vektörler (yarıçap vektörleri) eski vektörler cinsinden  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{a}$  şeklinde gösterilir. İç kuvvetler  $\vec{F}_{ij}$  sadece cisimlerin görelî yerlerinden bağımlıdır, yani  $\vec{r}'_i - \vec{r}'_j = (\vec{r}_i - \vec{a}) - (\vec{r}_j - \vec{a}) = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  vektörleri yeni koordinatlar cinsinden de eskileriyle aynı şekilde gösterilir.

Analitik mekanik parametre (istenildiği kadar küçük olabilir) içeren her hareket denklemindeki her simetrisinin korunum yasasına sebep olacağını göstermiştir<sup>35</sup>. Burada aslında üç parametremiz var, yerdeğişim vektörünün bileşenleri  $a_x$ ,  $a_y$ , ve  $a_z$ ; bu yüzden üç tane korunum niceliğimiz var — momentum vektörünün  $\vec{P}$  sırasıyla bileşenleri.

### Ek 2: Açısal Momentum Korunumu Yasası.

Momentum korunum yasasına benzer şekilde  $N$  cisimden oluşan ve aynı şekilde tahsis edilmiş bir sistem düşünelim. Ardından  $i$ . cismin açısal momentumunun zamana göre türevini alalım:

$$\frac{d}{dt} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right).$$

Burada çarpmanın türevi kuralını  $(ab)' = a'b + ab'$  kullandık, bu kural vektör cebirinde de geçerlidir:  $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$

ve  $(\vec{a} \times \vec{b})' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}'$  (vektörlerin sırasına dikkat etmeliyiz çünkü vektörel çarpım antikomütatiftir,  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ).  $\frac{d}{dt} \vec{r}_i = \vec{v}_i$  ve  $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$  olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki ilk terimin herhangi bir etkisi olmayacağına dikkat ediniz. Daha da sonra, sistemi  $i$  indeksi üzerinden toplayalım ve Newton'un 2. yasasını kullanarak eşitliğin sağ tarafındaki kalan terimleri yerine koyalım,

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \Rightarrow m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \left( \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \right)$$

buradan

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

elde edilir.

Şimdi de Newton'un 3. yasasından  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  olacağına dikkat edelim; noktasal cisimler arasındaki tüm makroskopik görelî olmayan kuvvetler ya cisimlerin temas noktasından (elastisite kuvveti, sürtünme kuvveti), cisimler temas ettiğinde, ya da bu cisimleri bağlayan doğruya paralel (elektrostatik kuvveti, kütle çekim kuvveti) olacak şekilde meydana gelir.<sup>36</sup> Her iki durumda da  $\vec{r}_j = \vec{r}_i + k\vec{F}_{ji}$  yazabiliriz; eğer bu eşitliği  $\vec{F}_{ji}$  ile çarparsak,  $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = -\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$  elde ederiz, dolayısıyla iç torklar toplamda birbirlerini dengeliyor; geri kalan ise net dış tork  $\vec{T} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ :

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{L}} = \vec{T}.$$

Bu Newton'un 2. yasasının dönen cisimler sistemi için genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir; eğer dış kuvvetlerin torku sıfır ise ( $\vec{T} = 0$ ) sonuç olarak açısal momentumun korunumunu elde ederiz,  $\vec{\mathcal{L}} = \text{sabit}$ .

Analitik mekanik ile açısal momentum korunumu mekanik sistemlerin bütün enerjisinin dönme simetrisinden (eğer referans sistemini  $\alpha$  açısı kadar orijin etrafında döndürürsek, bütün enerji için olan ifade aynı kalmalı) elde edilebileceğine dikkat ediniz.

**Ek 3: Enerji korunum yasası.** Enerji korunum yasasını türetmek için, şu şekilde tanımlanan bir cisim sisteminin kinetik enerjisinin zamana göre türevini düşünelim:  $K = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j$  (burada  $v_j^2$  ifadesini,  $\vec{v}_j$  teriminin kendisiyle skalar çarpımı olarak yazdık). Skalar çarpım halindeki ifadenin türevi için, çarpım türevi için olan normal kural uygulanır:  $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$ ; skalar çarpımın değişme özelliği olduğu için (yani  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ), şunu elde ederiz:  $(\vec{a} \cdot \vec{a})' = 2\vec{a} \cdot \vec{a}'$ . Buradan,

$$\frac{d}{dt} K = \sum_j m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot \vec{v}_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j,$$

olur ve kinetik enerjinin değişimi için tekrar düzenleme yapılırsa  $dK = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j dt$ , burada  $i$ . cisim üzerine uygulanan kuvvet iç ve dış kuvvetlerin toplamı olarak yazılabilir,  $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$  ve  $\vec{v}_i dt = d\vec{r}_i$ . Sonrasında

$$dK = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

Burada,  $\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$  ifadesi  $\vec{F}_{ij}$  kuvveti tarafından yapılan iş olur.

<sup>35</sup>Bu Noether'in teoreminin bir içeriğidir (E. Noether 1918).

<sup>36</sup>Görelî olmayan hızlarda hareket eden iki yüke etki eden Lorentz kuvveti elektrostatik kuvvetinden çok daha küçük olduğundan görelî bir etkidir; hala, Lorentz kuvveti açısal momentum korunumunu ihlal eden birçok duruma yol açabilir örn. bir halka akımının merkezinde hareket eden yük durumunda.

## 5. TEKRAR PROBLEMLERİ

Eğer  $\vec{F}_{ij}$  kuvveti,

- (a) sadece  $\vec{r}_i$  koordinatlarına bağlı ise ve hız  $\vec{v}_i$  ve zaman  $t$  parametrelerinden bağımsız ise;
- (b) eğer  $\Pi \equiv \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$  şeklinde bir fonksiyon varsa (bundan sonra potansiyel enerji adını alacaktır), cisimlerin yaptığı sonsuz küçük  $d\vec{r}_i$  yer değişimleri esnasında, iç kuvvetler  $\vec{F}_{ij}$  ve dış kuvvetler  $\vec{F}_i$  tarafından yapılan toplam iş, potansiyel enerjinin tam diferansiyel<sup>37</sup>ine eşittir - daha doğrusu eksilisine eşittir ve enerji korunum yasasına uygun forma gelmiş olur - yani

$$-d\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_i \left( \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i;$$

bu durumda sistemdeki herhangi bir yerdeğişimi için,  $dK = -d\Pi$  olur buradan,  $d(K + \Pi) = 0$ , diğer bir deyişle toplam enerji  $E = K + \Pi = \text{const}$  olarak bulunur; yukarıda belirtilen özelliklere uyan iç ve dış kuvvetlere (sırasıyla  $\vec{F}_{ij}$  ve  $\vec{F}_i$ ) korunumlu kuvvet adı verilir.

Yukarıda belirtilen (b) şartının, kuvvetler tarafından yapılan işlerin sadece sistemin ilk ve son durumlarına (yani, noktasal kütlelerin pozisyonlarına bağlı) ve noktasal kütlelerin hangi yörüngeye oturduğuna bağlı olmadığını söylemekle aynı olduğuna dikkat edin. Matematiksel olarak, bu durum kısmi türevler kullanılarak yeniden yazılabilir. <sup>38</sup>,

$$-\frac{\partial \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)}{\partial x_i} = \sum_j F_{ijx} + F_{ix}; \quad (12)$$

bu koşul denkleminin sağ tarafı  $i$ -inci noktasal cisme etki eden toplam kuvvetin  $x$  bileşenidir ( $x_i$  ifadesi,  $i$ -inci parçacığın  $x$  koordinatından bahsederken kullanılır);  $y$  ve  $z$  bileşenleri için benzer koşullar geçerlidir.

Korunumlu kuvvetlerin önemli olduğu bir durum, merkezi kuvvet alanlarının olduğu durumudur: iki noktasal cisim arasındaki iç kuvvet, bu noktasal cisimleri bağlayan hatta paraleldir ve sadece mesafenin mutlak değeri ile bağlıdır,

$$\vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) f_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

ve  $i$ -inci noktasal cisim üzerine etkileyen dış kuvvet, referans noktası  $\vec{r}_{i0}$ 'a göre benzer bir özelliktedir,

$$\vec{F}_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}) f_i(|\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}|);$$

Newton'un 3. yasasına göre,  $f_{ij}(r) = f_{ji}(r)$  olduğu unutulmamalıdır. Bu durumda,  $f_{ij}$  ve  $f_i$ 'nin itme için pozitif değer ve çekim için negatif değer alan potansiyel enerji,

$$\Pi = \sum_{i < j \leq N} g_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) + \sum_{i \leq N} g_i(|\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}|), \text{ burada}$$

$$g_{ij}(r) = - \int^r f_{ij}(r') r' dr', \quad g_i(r) = - \int^r f_i(r') r' dr' \quad (13)$$

(bu integrallerin alt sınırı keyfi olarak seçilebilir). Bu potansiyel enerji ile eşitlik (12)'nin  $i$ 'nin tüm değerleri için gerçekten sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek zor değildir.

Eğer korunumlu olmayan bazı dış kuvvetler de mevcutsa, korunumlu ve korunumsuz kuvvetleri ayırabiliriz,  $\vec{F}_i = \vec{F}_i' + \vec{F}_i''$ , ki buradan

$$d(K + \Pi) = \sum_i \vec{F}_i'' \cdot d\vec{r}_i,$$

burada  $\vec{F}_i''$  ifadesi  $i$ -inci noktasal cisme etki eden tüm korunumsuz kuvvetlerin toplamını belirtir.

**Ek 4: Merkezkaç ve Coriolis Kuvvetleri.** Orijin  $O$  etrafında  $\vec{\Omega}$  (vektör, dönme eksenini sağ el kuralına göre tanımlar.) açısal hızı ile dönen bir referans sistemi ele alalım. Dönen sistemde hareketsiz olan  $P$  noktasını düşünün, konumunu  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  olarak gösterelim. Laboratuvar referans sisteminde,  $P$  noktası  $v = r\Omega$  hızında ve hızın yönü  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  olduğunda  $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$  olduğu gösterilebilir. Şimdi, eğer  $P$  noktası dönen referans çerçevesinde  $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$  hızıyla hareket ederse (döner sistemdeki zamanı ölçmek için  $\tau$  kullanalım) öyleyse, bu ek hızın hareketsiz bir nokta için olan ifadeye eklenmesi gerekir:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Bu sayede, dönen ve laboratuvar referans çerçevelerindeki vektörlerin zaman türevlerinin şu şekilde ilişkili olduğu sonucuna varabiliriz

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} + \vec{\Omega} \times .$$

Bu eşitlik bir operatör şeklinde yazılmıştır, bu da herhangi bir vektörü (örn.  $\vec{r}$  veya  $\vec{v}$ ) üç terimi kullanarak yazabileceğimiz anlamına gelir. Özellikle, bu formülü  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$  eşitliğinin sağ ve sol taraflarına uygulayabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left( \frac{d}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \right) \left( \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \\ &= \frac{d\vec{u}}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \vec{u} + \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{d\tau} + \vec{\Omega} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{r} \right). \end{aligned}$$

Burada, vektörlerin çarpımları ve vektörlerin türevlerini hesaplarken, bilinen tüm kuralların uygulanabileceğini aklımızda tutmamız gerekir; özellikle de,  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$  ve  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$ . Ayrıca ikili vektör çarpımı kuralına ihtiyacımız var,  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ; çift çarpımın, vektörlerin iç parantezlerindeki terimlerden yapılan lineer kombinasyonlar olduğunu akılda tutarak bu eşitliği hatırlayabilirsiniz. Ayrıca,  $\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau} = 0$  ve  $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{u}$  olduğunu akılda tutarak ve  $\vec{r} \perp \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$  olduğunu kabul ederek, şunu elde ederiz:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \Omega^2 \vec{r}.$$

$\frac{d\vec{v}}{dt}$  terimi  $P$  noktasının laboratuvar referans sistemindeki ivmesidir ve benzer şekilde  $\frac{d\vec{u}}{d\tau}$  dönen referans sistemindeki ivmedir. Şimdi, eğer  $P$  noktası  $m$  kütleli ise ve cisme etki eden  $\vec{F}$  dış kuvveti varsa, yani  $\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{d\tau}$  olacaktır ve bu durumda,

$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{F} - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}m + \Omega^2 \vec{r}m,$$

yani dönen referans sisteminde cisim, ek kuvvetler varmış gibi davranır: Coriolis kuvveti  $-2\vec{\Omega} \times \vec{u}m$ , ve merkezkaç kuvveti  $\Omega^2 \vec{r}m$ .

**Ek 5: Denge ve korunum yasaları.** Bir sistemin potansiyel enerjisinin minimum olduğu anda dengede olduğu bilinmektedir. Ama neden? Neden bir minimum bir maksimumdan farklı? Fermat prensibi durumunda, belirgin bir fark vardır: iki nokta arasında en uzun optik yol yoktur — ışın sadece “zig-zag” çizebilir — ancak kesinlikle en kısa yol vardır!

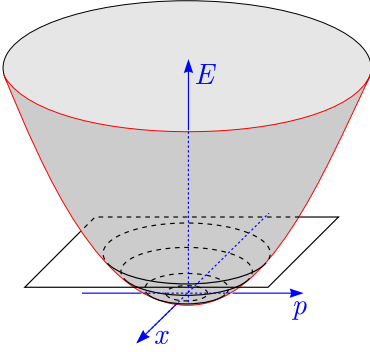
Sebebin basittir — denge durumunda kinetik enerji her zaman

<sup>37</sup>Tam diferansiyel şu şekilde tanımlanır  $d\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \equiv \Pi(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \vec{r}_2 + d\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N + d\vec{r}_N) - \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$

<sup>38</sup>Bir fonksiyonun kısmi türevi: verilen bir değişkene göre türev alınırken, diğer tüm değişkenlerin sabit olduğu varsayılır; örneğin,  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$  ifadesi,  $f(x,y)$ 'nin  $x$ 'e göre  $y$  değişkeni sabitmiş gibi alınan türevdir.

## 5. TEKRAR PROBLEMLERİ

minimumdur (kütleler pozitif olduğu sürece). Denge de olma durumu için aslında ihtiyacımız olan şey, bir korunan bir özelliğin koşullu ekstremumudur (net enerji gibi), korunan diğer özelliklerin sabit tutulduğu varsayımı altında (koşulsuz ekstremum da kabul edilebilir). Bir cismin  $x$  eksenini boyunca hareketini düşünün ve bunu  $x$  ve  $p$  (momentum) koordinatlarıyla faz düzleminde tanımlayalım. Genel enerji  $E = U(x) + p^2/2m$  'dir. Şimdi, eğer bu enerjini  $x$ ,  $p$  ve  $E$  koordinatlarıyla 3 boyutlu uzayda bir yüzey olarak tasvir edersek, sistemin durumunu tanımlayan nokta o yüzeyin kesişme çizgisi boyunca yatay bir düzlemde (yani denkleminin  $E = \text{Const}$  olan düzlemde) hareket edecektir. Minimum  $U(x)$  değerinde,  $p = 0$  ile bu kesişme çizgisi yalnızca tek bir nokta olacaktır, çünkü bu yüzeyin en düşük noktasıdır. Yatay düzlemi biraz yükseltirsek, yakın yörüngeler elde edilir,  $E = E_{\min} + \varepsilon$ . Bu yörüngenin tüm noktaları (elips üstündeki çizgiler) denge noktasına yakındır, bu nedenle durum gerçekten de dengededir.



Bir sistemin koşullu maksimum net enerjiden dolayı da dengede olabileceği görülmektedir: kinetik enerjinin koşulsuz bir ekstremitesi yalnızca minimum olabilirken, koşullu ekstrema için işler farklıdır. Belki de en basit örnek, rijit bir cismin dönmesidir.  $a$  uzunluğunda,  $b$  genişliğinde ve  $c$  kalınlığında ( $a > b > c$ ) dikdörtgen bir tuğla düşünelim.  $I_c$  kütle merkezinden geçen ve  $(a, b)$  - düzlemine dik olan eksen için eylemsizlik momenti olsun;  $I_b$  ve  $I_a$  benzer şekilde tanımlanmıştır. Genel bir durum için,  $I$  eylemsizlik momenti, dönme ekseninin yönüne bağlı olacaktır, ancak  $I_c \geq I \geq I_a$  olacağı açıktır (tensorlerin nasıl kullanılacağını öğrendiğinizde kolayca gösterilebilir). Şimdi, tuğlayı havaya döndürerek atalım ve hareketi tuğlanın kütle merkezi ile birlikte hareket eden bir çerçevede inceleyelim (bu çerçevede yerçekimini görmezden gelebiliriz). Korunan iki miktar vardır: açısal momentum  $L$  ve dönme enerjisi  $K = L^2/2I$ . Sabit  $L$  değeri için, sistemin minimum enerjiye sahip olduğu eylemsiz momentinin  $I = I_c$  (en kısa kenara paralel ekseninde) ve maksimum enerjiye sahip olduğu eylemsiz momentinin  $I = I_a$  (en uzun kenara paralel ekseninde) olduğunu görürüz. Her iki dönüş yolunun gerçekten de stabil olduğunu deneysel olarak kolayca kontrol edebilirsiniz! Bu arada, eğer eksen üçüncü kenara paralel ise, dönme dengesizdir. Bu fenomen NASA'nın Uluslararası Uzay İstasyonu'ndaki bir videosunda gösterildi, <https://mix.msfc.nasa.gov/abstracts.php?p=3873>.

Aslında, minimum enerjiyle rotasyon hala maksimum enerjiden biraz daha stabildir; nedeni enerji yitimidir<sup>39</sup>. Sistemin faz uzayındaki hareketini temsil etmeye çalışırsak (yukarıda açıklandığı gibi), bir kase şeklindeki enerji yüzeyi (yukarıdaki

şekilde gösterildiği gibi) tepe şeklindeki bir yer değiştirecek; dengede, faz yörüngesi bir noktaya - yani "tepe" nin tepesinin yatay bir düzlemlerle temas ettiği noktaya bağlanır:  $E = E_{\max}$ . Süreç boyunca enerji yitimi nedeniyle enerji azalacak,  $E = E_{\max} - \varepsilon$ , ve faz yörüngesi yavaş yavaş tepeyi inen bir sarmal olacaktır. Yani, muhtemelen enerji yitiminin bir sistemi kararlı bir duruma doğru çektiğini bilmeye alışmış olsanız da, bunun tam tersi, sistemi kararlı durumdan uzağa çeker! Bu yitirici kararsızlık olarak bilinen şeydir.

**Ek 6: Lagrangian formalizmi.** Mekanik yaklaşımımızda Newton yasalarını varsaydık ve bundan yola çıkarak korunumlu kuvvetler için geçerli olan enerji korunumu yasasını türettik; ardından enerji korunumu yasasını kullanarak genelleştirilmiş koordinatlar yöntemine ulaştık.

Analitik mekanikte sıra tersdir. İlk olarak, herhangi bir mekanik sistemin (birden fazla sistem için eklenebilir) belirli bir potansiyel enerjiye ve kinetik enerjiye sahip olduğunu varsayılır; Ayrıca, noktasal cisimlerin kinetik enerjisi ve etkileşimin türüne bağlı olarak noktasal cisim etkileşimlerinin potansiyel enerjileri için bir formül oluşturulur (bu, Bölüm 2'deki farklı etkileşim tipleri için kuvvetleri hesaplamak için kurallar oluşturmaya benzer şekilde yapılır.)

İkinci olarak,  $n$  serbestlik derecesine uyan bir mekanik sistemi ele alalım, yani sistemin durumunu özel olarak belirtmek için  $n$  tane parametreye ihtiyacımız var. Bu sistemin davranışını bir takım koordinatlarla tanımlayalım. İlk anda  $t = \tau$  ve  $q_i$ ,  $i \in [1, n]$  olduğunu kabul edelim, [bu durum  $n + 1$  boyutlu konfigürasyon alanında  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \tau)$  koordinatlarına sahip bir noktaya karşılık gelir] ve başka bir durumda  $q'_i$  ve  $t = \tau'$  olsun. Daha sonra sistemin evrimi için parçaların  $q_i(t)$  şeklinde yol aldığı (ilk ve son konfigürasyonları uzayda birbirine bağlayan bir eğri) ve bu yol için belirli bir integral  $\mathcal{S}$ 'in olabilecek en küçük değerde olduğunu kabul edelim. Aksiyon olarak adlandırılan bu integral, sırasıyla  $V$  ve  $T$  olarak belirtilen, sistemin tüm potansiyel ve kinetik enerjileriyle tanımlanır; Potansiyel  $V$  koordinatların bir fonksiyonudur,  $V = V(q_i)$ ,  $i \in [1, n]$ , ve kinetik enerji  $T$  de koordinatların zamana bağlı türevi  $\dot{q}_i$ 'nin bir fonksiyondur:

$$\mathcal{S} = \int_{\tau}^{\tau'} \mathcal{L}[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] dt, \quad (14)$$

burada

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t) \quad (15)$$

sistemin Lagrangianı olarak adlandırılır ve bizim bu varsayımımıza da en az eylem ilkesi (principle of least action) denir.<sup>40</sup>

Varyasyonel analiz yöntemlerini kullanarak, bu integralin ekstremum değeri alabilmesi için<sup>41</sup>:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}; \quad (16)$$

olduğu gösterilir. Burada  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  Lagrangian  $\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i, t)$ 'nin türevini sadece  $2n + 1$  değişkeninden sadece biri olan  $\dot{q}_i$ 'ye göre aldığımızı ve diğer bütün değişkenleri sabit tuttuğumuzu anlatır.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  de benzer şekilde tanımlanmıştır. Bunun yanında,  $\frac{d}{dt}$  zamana göre tam türevdir, yani  $\mathcal{L}$ 'nin hem  $t$  argümanı ile açıkça

<sup>39</sup>dissipation

<sup>40</sup>Ayrıca durağan bir hareket prensibi (principle of a stationary action) olarak da bilinir.

<sup>41</sup>Daha doğrusu, fonksiyonel — hangi fonksiyonlara sahip olduğumuza (örn,  $q_i(t)$ ) bağlı skalar bir miktar

## 5. TEKRAR PROBLEMLERİ

zamana bağlı olduğunu ve  $q_i$  ile  $\dot{q}_i$ 'in da zamanın bir fonksiyonu olduğu için  $t$  argümanı ile açık bir şekilde bağlı olduğunu göz önüne alıyoruz. Lütfen Denklem (16)'in her  $i$  için geçerli olduğunu ve böylelikle  $n$  denklem sistemine sahip olduğumuzu unutmayın. En az eylem prensibinden Denklem(16)'e sadece matematiksel adımlar vardır, bu nedenle analitik mekanik için Denklem(16)'in postulat olduğunu söyleyebiliriz.

Peki hangisi daha iyidir: tarihsel sürece uyacak şekilde Newton yasalarını postulat yapmak mı yoksa Denklem 16'yı postulat yapmak mı? Her iki yaklaşımın da güçlü ve zayıf noktaları vardır. Klasik yaklaşım adım adım ve deneysel bulgularından inşa edilirken, analitik mekaniğin yaklaşımı “havadan” en az hareket prensibini alır. Bu arada, Denk. (16) bize teorik analiz için çok evrensel ve güçlü bir araç sunar (kullanımı mekaniği ile sınırlı değildir): Lagrangian için bir ifadeye sahip olur olmaz sistemin nasıl gelişeceğini tanımlayan evrim denklemini yazabiliriz. Bununla birlikte, sadece klasik mekanik durumunda,  $\mathcal{L} = T - V$  geçerli olduğu ve başka özellikteki sistemler için dikkatli olunmasının gerekliliği unutulmamalıdır (aşağıya bakınız).

Nitekim, en az eylem prensibi kuantum mekaniği kullanılarak daha doğal olarak (havadan gelmeden) uygulanabilir. Aslında, bir nokta kütesini kuantum-mekanik olasılık dalgası olarak kabul edersek, yarı klasik yaklaşımı kullanarak, dalganın fazını

$$\varphi = \int (\vec{k} \cdot d\vec{r} - \omega dt) = \hbar^{-1} \int (\vec{p} \cdot d\vec{r} - E dt); \quad (17)$$

olarak ifade edebiliriz. Burada parçacık için  $\vec{p}$  momentum ve  $E$  ise enerjidir. Eğer  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  ve  $\vec{v} \cdot \vec{p} = 2T$  akılda tutarsak buradan şöyle yazabiliriz:  $\varphi = \hbar \int [2T - (T + V)] dt = \hbar S$ . Sonuç olarak aksiyon  $S$  bize direkt olarak dalganın fazını verir. Dalgalar, aynı aşamaya gelirlere yapıcı bir şekilde toplanırlar, ve farklı yollar boyunca gelen birçok dalga, eğer bu yollar en az aksiyon yoluna yakınsa hemen hemen aynı fazda ulaşır. Aynı olgunun, ışığın yayılması durumunda olduğu Fermat'ın ilkesi olarak özetlenebileceği belirtilmelidir.<sup>42</sup> Huygens'in dalga yayılımı ilkesine göre, olasılık dalgasının genliğinin toplamı üzerinde olabileceğini söyleyebiliriz. tüm olası ışın izlemlerinden katkılar; bununla birlikte, bu katkıların çoğunluğu zıt fazlardan dolayı iptal edilir ve yalnızca “en uygun yol” (ve yakın mahallesinin) katkısı bozulmadan kalır, “en uygun” aksiyonun bir ekstremuma karşılık gelen (minimum gibi görünüyor) anlamına gelir. Böylece, bir noktasal cismin en az eylem yörüngesi boyunca hareket ettiğini söyleyebiliriz.

Şimdi, en az işlem ilkesinin Newton yasalarına uygun olup olmadığını kontrol edelim. Bunun için noktasal kütleler sistemi hayal edelim,  $m_i$ ,  $i \in [1, n]$ , ve klasik Öklid koordinatlarını kullanalım:  $\vec{r}_i$ 'nin  $i$ -inci noktayı işaret eden konum vektörü olduğunu varsayalım. Bu durumda Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i \vec{v}_i^2 - \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots);$$

olur. Burada  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$  olacak şekilde yazdık ve tüm etkileşme kuvvetlerinin korunumlu olduğunu kabul ettik:  $\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$  ifadesi potansiyel enerjiyi tüm parçacıkların konumları cinsin-

den göstermektedir. Eğer Denk. 16 bu Lagrangiana uygulanırsa,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ix}} = m_i v_{ix}$  olduğunu aklımızda tutarak (burada  $x$  indisi bir vektörün  $x$  eksenindeki izdüşümüdür), şunu elde ederiz:

$$\frac{d}{dt} m_i v_{ix} = - \frac{\partial \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)}{\partial x_i}.$$

Denk. (12)'ye göre, eşitliğin sağ tarafı  $i$ -inci parçacığın üzerine etki eden kuvvetin  $x$  bileşenidir ( $y$  ve  $z$  bileşenleri için de benzer olacağı açıktır). Sonuç olarak, Öklid koordinatlarına göre Denklem (16), Newton yasalarına özdeştir. Bu esnada Denklem (16)'in doğruluğunu göstermek en az eylem prensibinin de geçerli olduğunu gösterir. Şimdi, en az eylem prensibinin koordinat sisteminden bağımsız olarak formüle edildiğini hatırlayalım: eğer belirli bir yörünge  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$  için aksiyon Öklid koordinatlarında minimum ise  $\vec{r}_i$  yörüngesi genel koordinatlar  $q_i = q_i(t)$  ile ele alındığında da aksiyon minimum olacaktır. Yörünge, genelleştirilmiş koordinatlar  $q_i$  açısından ekstremal bir aksiyona sahip olduğundan, (varyasyonel analiz sonuçlarına göre), genelleştirilmiş koordinatlar  $q_i$  kullanıldığında, Lagrangian denklemi (16) de geçerli olmalıdır. Bu durum Newton yasaları ve Denk. (16) arasındaki özdeşliği ispat<sup>43</sup> etme sürecimizi sona erdirmiş olur.

Her ne kadar ispatı yapsak da, çeşitli kısıtlamalar nedeniyle serbestlik derecelerinin azaldığı durumlarla ilgili bir yorum yapmamız gerekiyor. Örnek olarak,  $N$  moleküllerinden yapılmış rijit bir cisim ele alalım; bu molekül grubunun  $3N$  serbestlik derecesi vardır. Bununla birlikte, moleküller arasındaki nispi mesafeler moleküler kuvvetlerle sabitlenir, böylece sadece altı serbestlik derecesi kalır: üç sayı kütle merkezinin konumunu sabitler ve vücudun oryantasyonu üç açısal koordinat ile sabitlenir. Önceden bir nokta kümesi kütesi (moleküller) için en az eylem prensibini ispatladık, bu yüzden sistemimizin  $3N + 1$  boyutlu konfigürasyon uzayında, bir  $\sigma$  eğrisi ile başlangıç noktası  $A$  ile bitiş noktası  $B$  arasında, aksiyonu minimize edecek şekilde birleştireceğini biliyoruz. Bu konfigürasyon uzayında, Lagrangian'ın moleküller arası etkileşim enerjilerini de hesaba katması gerekir. Moleküller arası etkileşim enerjileri için olan ifade oldukça karmaşık olsa da, sadece makroskopik dinamiklerle ilgilendiğimiz sürece, sadece mesafeleri düzeltmemiz gerekir. Mesafeler basitleştirilmiş bir Lagrangian ile tespit edilebilir: eğer iki molekül arasındaki mesafe olması gerektiği değere eşitse moleküler arası etkileşim enerjisinin sıfır olduğunu söyleriz. Diğer durumlarda bu enerji çok büyük değer alır. Moleküller arası mesafelerin sabit olması nedeniyle, bu molekül sisteminin durumu altı genelleştirilmiş koordinat tarafından tamamen tanımlanabilir; bu,  $3N + 1$  boyutlu konfigürasyon uzayındaki tüm yörüngelerin altı boyutlu bir hiper yüzey<sup>44</sup>  $\mathcal{M}$  ile sınırlandırıldığı anlamına gelir ( $A$  ve  $B$  değerinin aynı hiper yüzeyde bulunması gerekir).  $\sigma$  yörüngesinin  $3N + 1$  boyutlu konfigürasyon uzayında  $A$  ile  $B$  arasındaki eylem integralini en aza indirdiğini biliyoruz; hiperyüzey  $\mathcal{M}$  bu alanın bir parçasıdır, bu yüzden de  $\mathcal{M}$  hiperyüzeyinde de  $A$  ile  $B$  arasındaki eylem integralini de kesinlikle en aza indirir. Bu nedenle, Denk. (16) rijit cismin durumunu tanımlamak için

<sup>42</sup>Aynı nedenden dolayı gökkuşağın tam olarak görebiliyoruz: gökkuşağın yayı görülebilir, çünkü küresel bir su damlasının içindeki bir yansımadan sonra bir ışığın sapma açısı kayar (hedef parametresinin bir işlevi olarak); bu nedenle, ekstremum açısının yanına yakın, geniş bir hedef parametresi aralığı dar bir eğim açısına karşılık gelir.

<sup>43</sup>Biz bu süreçte varyasyonel analiz kullanarak matematiksel özellikler türetmiş olduk.

<sup>44</sup>hypersurface

## 5. TEKRAR PROBLEMLERİ

altı genelleştirilmiş koordinat kullandığımız zaman da geçerli kalmalıdır. Benzer argümantasyon sadece rijit bir cisim için değil, sistemin parçalarının göreceli pozisyonlarını sabitleyen herhangi bir kısıtlama için de çalışır (ve böylece serbestlik derecelerinin sayısını azaltır).

Önceki paragrafın tartışmalarından da önemli bir kural çıkartabiliriz: içsel kısıtlı bir sistem için Lagrangian'ı genelleştirilmiş koordinatları kullanarak yazarsak, koordinatların sayısı mümkün olduğunca az olmalıdır. Örneğin, eğer rijit bir cisim varsa, yedi değil altı koordinat kullanmalıyız, çünkü yedinci koordinatın değeri ilk altıdan elde edilebilir (yedinci koordinatla birlikte, yedinci koordinatın değerini tespit ederken Lagrangian'a ek bir terim eklememiz gerekir.).

Bu nedenle, iki seçeneğimiz vardır: Lagrangian denklemi (16)'yı veya enerji korunumundan hareket denklemlerini çıkardığımız yöntem 6'yı kullanabiliriz. Bu iki yaklaşım oldukça benzerdir: Her iki durumda da kinetik ve potansiyel enerjileri genelleştirilmiş koordinatlar ve bunların zaman türevleri olarak ifade etmemiz gerekir. Bununla birlikte, belli farklılıklar da vardır: bir durumda hareket denklemini doğrudan enerji korunumu yasasından türetiriz; diğer durumda, bu iki enerjinin farkını göz önünde bulundurur ve postulat olarak kabul ettiğimiz (veya Newton yasalarından oldukça karmaşık bir şekilde türetilen) bir formülü uygularız.

Hangi yol daha iyidir? Öncelikle, Denk. (16) her durumda geçerli olduğu vurgulanmalıdır, öte yandan enerji korunum yasasını temel alan yöntem 6 sadece serbestlik derecesinin 1 olduğu durumlarda uygulanabilir, diğer bir deyişle sistemin durumunun sadece tek genelleşmiş koordinat ile ifade edilebildiği örneklerde. Aslında, enerji korunumu yasasının türevini alarak, bir diferansiyel denklem elde ediyoruz, ancak çözüm yapabilmek için bilinmeyen fonksiyonlar (serbestlik dereceleri) olduğu kadar denkleme ihtiyacımız var. Bununla birlikte, çoğu Olimpiyat problemi için bu koşul yerine getirilmiştir (her korunan miktarın, örneğin momentumun, etkili serbestlik derecelerini birer birer azalttığını unutmayın).

Öyleyse, tek genelleştirilmiş koordinat  $q$  için bu iki denklemi karşılaştıralım ve enerjini açıkça zamana bağlı olmadığını kabul edelim. Newton mekaniğinde (yani klasik durum), kinetik enerji hızın karesi ile orantılıdır bu durumda kinetik enerji için  $T = \frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2$  olduğunu kabul edelim. Buna göre enerji korunumuna göre  $\frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2 + V(q) = E$  olur, buradan  $\frac{1}{2}\mathcal{M}'(q)\dot{q}^3 + \mathcal{M}(q)\dot{q}\ddot{q} + V'(q)\dot{q} = 0$  ve

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} = -\frac{1}{2}\mathcal{M}'(q)\dot{q}^2 - V'(q).$$

Bu esnada Lagrangian  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{M}(q)\dot{q}^2 - V(q)$  olarak ifade edilir; sonrasında,  $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{d}{dt}\mathcal{M}(q)\dot{q} = M'(q)\dot{q}^2 + M(q)\ddot{q}$  ile, Denk. (16) şu şekilde tekrar yazılır:

$$M'(q)\dot{q}^2 + M(q)\ddot{q} = \frac{1}{2}M'(q)\dot{q}^2 - V'(q).$$

Her iki durumda da aynı denklemi elde ettiğimizi görmek kolaydır ve matematiksel olarak zorluk seviyesinin neredeyse aynı olduğunu görürüz. Ancak, Denk. (16)'ın, enerji korunumu yasasına dayanan yöntemi biraz daha kolay hale getirdiğinin hatırlamamız gerekir.

Bir sonuca varmadan önce, iki tane  $m$  kütleli topa bağlı,

yay sabiti  $k$  serbest uzunluğu ise  $a$  olan ve  $\vec{L}$  açısız momentumu (açısal momentum yaya dik yöndedir) ile dönen kütleli yay sistemi düşünelim. Burada, serbestlik derecesi 2 olarak görünür (açı ve yayın uzunluğu), ancak enerji korunumuna ek olarak açısal momentumun da korunması etkin serbestlik derecesini 1'e düşürür. Yayın sıkışması (ya da açılması) olan  $x$ 'i genelleştirilmiş koordinat olarak alalım. Buna göre,

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{L^2}{m(a+x)^2}, \quad \Pi = \frac{1}{2}kx^2.$$

Burada önemli nokta kinetik enerji bu örnekte sadece  $\dot{x}$ 'a bağlı değil, aynı zamanda  $x$ 'e de bağlıdır; kinetik enerjideki ikinci terim bu nedenle potansiyel enerji gibi etki edecektir ve toplam enerji denklemlerinde etkin potansiyel enerji terimi olarak yazılabilir. Yöntem 6 üzerinden devam edersek, şunu elde ederiz:

$$\frac{1}{2}m\ddot{x} - \frac{2L^2}{m(a+x)^3}\dot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{4L^2}{m^2(a+x)^3} - 2\frac{k}{m}x.$$

Sonrasında aynı sonucu Lagrangian ile aynı sonucu elde etmeye çalışalım (NB!<sup>45</sup> Bu yanlış olacaktır!):

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{L^2}{m(a+x)^2} - \frac{1}{2}kx^2,$$

buradan

$$\frac{1}{2}m\ddot{x} = -\frac{2L^2}{m(a+x)^3} - kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{4L^2}{m^2(a+x)^3} - 2\frac{k}{m}x.$$

Bu öncesinde bulduğumuz sonuç değildir — denklemin sağ tarafındaki ilk terimin işareti farklıdır! Peki, ne yanlış gitti? Enerjinin korunduğu durumda ilk bulduğumuz sonucun doğru olduğu açıkça görülür. Yanlış giden şey, açısal momentum koruma yasasını kullanarak koordinat sayısını azaltığımızda konfigürasyon uzayındaki başlangıç ve bitiş noktalarını değiştirmemizdir. Yukarıda ispatladığımız üzere, en az eylem prensibinin [ve bunun sonucunda, Denk. (16)'nın] geçerli olması için korunum yasaları ile serbestlik derecesinin düşürülmemesi gerekir ve tüm korunum yasaları Denk. (16)'nın bir sonucu olarak değerlendirilmelidir. Bu durumda, sistem için serbestlik derecesi ikidir: sıkışma uzunluğu  $x$  ve yayın dönme açısı  $\varphi$  tüm sistemin durumunu açıklayacak parametrelerdir. Bu iki koordinatı ilgili Lagrangian ile birlikte kullanırsak, o zaman her şey doğru olacaktır: aksiyon

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{m\dot{\varphi}^2(a+x)^2}{4} - \frac{1}{2}kx^2 \right] dt$$

değeri doğru yörünge ile minimize olacaktır ve bunun için ilk durum  $x_1, \varphi_1$  ve son durum  $x_2, \varphi_2$  değerlerini bağlayan tüm yörüngeler karşılaştırılacaktır. Ancak, şimdi  $\varphi$  değişkenini indirgeyerek ilk ve son açılar için şartı düşürdük, bu nedenle daha birçok yörünge  $x_1$  ilk durumunu  $x_2$  son durumuna bağlar hale geldi: artık gerçek yörünge en az eylem yapılan yörünge olmayabilir. Bu analizden çıkarılacak önemli bir ders, koordinatların zaman türevlerini içeren bir kısıtlama (koruma yasası) kullanarak bir serbestlik derecesini azalttığımızda, Denk.(16)'yı kullanmamamız gerektiğidir. Çünkü bir koordinatın zaman türevini sabitleyerek, koordinatın değerini sabitlemeyiz. Bu tür koruma yasalarımız varsa ve koordinatları sayısını bire indirebilecek kadar çok kısıtlama bulmayı başarırırsanız, yöntem 6 üzerinden devam edin; aksi takdirde orijinal koordinat sayısını koruyun ve Denk. (16)'yı uygulayın.

Son olarak, Lagrangianın yalnızca klasik mekanik duru-

<sup>45</sup>Nota bene (nb): Lütfen dikkat ediniz

munda kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı tarafından verildiğini de vurgulayalım; Diğer durumlarda, ilk görev Lagrangian'ın ifadesini çözmektir. Nasıl yapacağız? Temelde iki seçenek var. Öklid koordinatları  $x_i$ 'deki hareket denklemini zaten bildiğimizi varsayarak yapabiliriz.  $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$ 'i bulmak için deneme ve hata düzeltmeleri yaparak Denklem (16)'nın hareket denklemi ile aynı hale getirmesini sağlayın. Asıl hareket denkleminin fizikten kaynaklanmak zorunda olmadığına dikkat edin. Bununla birlikte, ilgili Lagrangian'ı bulduktan sonra, fiziksel olarak yorumlayabiliriz: örneğin, Lagrangian öteleme simetrisine uyuyorsa, Noether teoremini korumuş bir miktar bulmak ve momentum olarak adlandırmak için kullanabiliriz<sup>46</sup>. Elektromanyetizmada, bu yöntemi manyetik alanda yüklü parçacıkların genelleştirilmiş momentumunu türetmek için kullanacağız.

İkinci seçenek, kuantum mekaniksel olarak düşünülebilecek bir sistemi incelersek çalışır; bunu görelî özellikteki noktasal bir cisimi düşünerek açıklayalım. Mekanikteki en az eylem prensibinin Huygens prensibine karşılık geldiğini biliyoruz [bkz. Denklem (17)] ve bu nedenle, eylem kuantum-mekanik olasılık dalgasının fazı,  $\hbar$  ile çarpılmalıdır — bu durumda klasik aksiyon, görelî olanın küçük hız sınırındaki değeri olacaktır. Bunun için,  $m$  ile görelî kütleyi ve  $m_0$  ile parçacık için durgun kütleyi gösterim, bu durumda aksiyon

$$\mathcal{S} = \int (\vec{p} \cdot \vec{v} - E) dt = \int (mv^2 - T - V) dt = \int [m(v^2 - c^2) - V] dt$$

olur, buradan

$$\mathcal{L} = m(v^2 - c^2) - V = -m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V$$

sonucuna ulaşılır. Bu Lagrangian'ı Denk. (16)'nın içine koyarak bunu doğrulamak kolaydır,  $V = V(x, y, z)$  ve  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 'i göz önünde bulundurarak, Newton'un 2. yasasının görelî halini elde ederiz. Görüldüğü üzere, artık Lagrangian'da kinetik enerji terimi yoktur.

## 6 İPUÇLARI

1. Çember ve asıldığı gövdenin temas noktası  $O$  için tork dengesini yazın.  $O$  noktasından gövdeye çekilen teğetin yatayla yaptığı açı nedir (telin gövde üzerinde kaydığı bilindiğine göre)?
2. Silindir ile eğik düzlemin temas noktasına göre silindir & blok sistemi için tork denklemlerini yazın. Küçük bloğun konumunda silindire çekilen teğetin yatayla yaptığı açı nedir?
3. Fikir 4'e göre, 'CD çubuğu +  $m$  kütlesi' sistemini bir bütün olarak ele alın. Bu durumda sistem üzerine etki eden dört kuvvet olacaktır:  $m\vec{g}$ ,  $\vec{F}$ , ve çubukların gerilme kuvvetleri,  $\vec{T}_{AC}$  ve  $\vec{T}_{BD}$ . Gerilme kuvvetlerini bilmiyoruz ve bilmek de istemiyoruz. Fikir 2'ye göre, bu kuvvetler CD çubuğuna etki eden torkların AC ve BD'nin kesişim noktasına göre yazılacak tork dengesi denklemlerinde işin içinden çıkacaktır. Aslında, 20. olgudan dolayı AC çubuğundaki gerilme AC'ye paraleldir, aynı BD çubuğu için de geçerlidir. Şimdi,  $F$  kuvvetinin torku ne olmalıdır? Kuvvetin hangi yönü için en küçük büyüklüklü kuvvet ile gerekli tork elde edilebilecektir?
4.  $\vec{F}$  ve  $m\vec{g}$  kuvvetlerinin vektörel toplamı sürtünme kuvveti ile

## 6. İPUÇLARI

tepki kuvvetinin toplamı  $\vec{f} = \vec{N} + \vec{F}_h$ 'yi götürmelidir, diğer bir deyişle bu vektörel toplam yüzeyin normaliyile arctan  $\mu$  açısını yapmalıdır. Kuvvet üçgeni  $m\vec{g} + \vec{f} + \vec{F} = 0$ 'ı çizelim:  $m\vec{g}$  vektörü direkt olarak çizilebilir (yönü ve büyüklüğü biliniyor),  $\vec{f}$ 'nin yönü ise  $m\vec{g}$ 'nin uç noktasından geçen bir düz çizgiyle gösterilebilir.  $\vec{F}$  ise bu düz çizgiyi  $m\vec{g}$ 'nin başlangıç noktasıyla bağlamalıdır. Hangi yön için büyüklüğü minimum olacaktır?

5. Eğik düzlemin referansına geçin (Fikir 7 ve 8'i kullanın) ve problem 4 ile aynı yöntemi kullanın ( $\vec{a} + \vec{g}$  efektif yer çekimi  $\vec{g}_e$  olarak işlev görür).

6. Silindire bağlı (bloğun durgun ve merkezkaç kuvveti  $\vec{f}_t$ 'nin sabit ve dışarıya doğru olduğu) dönen bir referans sistemini kullanın. (a) Yerçekimini ile merkezkaç kuvvetlerinin bileşkesinin uç noktası bir çember üzerinde hareket ediyor ve tepki ile sürtünme kuvvetlerinin bileşkesi  $\vec{f}$ 'e eşit olması gerekiyor.  $\vec{f}_t$  ile  $\vec{f}$  vektörleri arasında, kayma olmadığı durumda, izin verilen maksimum açı nedir?  $m\vec{g}$ 'nin hangi yönü için  $\vec{f}_t$  ile  $\vec{f}$  arasındaki açı maksimum olur? (b) Halen sadece üç kuvvet mevcut; denge olduğu sürece bu üç vektör bir üçgen oluşturmak zorundadır ve bu sebeple de aynı düzlemde bulunmalıdırlar. K-11 fikrine göre, bu düzlemdeki kuvvet dengesini tasvir edeceğiz, yani  $\vec{g}$  ve  $\vec{f}_t$  vektörleri tarafından tanımlanan düzlemdeki. (a) bölümünde kullanılan yaklaşım halen kullanılabilir, ancak  $\vec{f}_t + m\vec{g}$  vektörünün uç noktası tam bir çemberin sadece bir yayını çizmektedir. Çizilen bu yayın merkez açısını bulun. Yay uzunluğuna bağlı olarak, yüzey normali (=  $\vec{f}_t$ 'nin yönü) ile  $\vec{f}$  arasındaki maksimum açı yayın bitim noktalarından birinde elde edilebilir.

7. Sabit hızla yuvarlanırken, bütün arabanın kütle merkezinin de sabit hızla hareket ettiğinin farkına varın. Ayrıca, her bir silindir de sabit açısal hızla dönmektedir, dolayısıyla üzerlerine etki eden tork olmamalıdır, yani sürtünme kuvveti sıfır olmalıdır. Tekerlerden birinin dönen referans sistemini kullanarak, bir asimetric cismi (delikli silindir) iki simetric cisimle (bir deliksiz silindir ve birleştirilmiş negatif yoğunluklu bir silindir) değiştirmek adına 12 ve 11 fikirlerini uygulayın. Dahası, yer çekimi ve merkezkaç kuvvetlerini çizmek için 9 ve 10 fikirlerini uygulayın, fakat çubuğun yatay kuvvet uygulayıp dikey uygulayamayacağını aklınızda bulundurun.

8. 14 fikrine dayanarak, sürtünme kuvvetlerinin kesişim noktası hangi çizgi üzerinde bulunmalıdır? Sürtünme kuvveti vektörleri ve ipliğin yönü arasında oluşan iki açı için, 1 numaralı fikir (eksen, iplikteki gerilmeye diktir) bilindiğine göre, ne söylenebilir? Şimdi, yukardan elde ettiğiniz iki sonucu birleştirin. Sürtünme kuvveti vektörlerinin kesişim noktası nerededir? Silindirin sürtünmeli bant üzerindeki noktalarının hız vektörlerinin yönü nedir? Silindirin ani dönme eksenini nerededir (kinematik broşüründen ani dönme eksenini nasıl bulacağınıza bakabilirsiniz)? Silindirin merkez noktasının hız vektörü nedir? (b) Yukarıda bulunan denge koşulu bütün yüzeyin sürtünmeli olduğu durumda ihlal edilir mi?

9. Çapı destek noktalarını bağlayan düz çizgi olan bir çember çizin. No. 22 olgusunu kullanın: Top hangi eğri boyunca hareket edebilir? Bu eğrinin en aşağı noktası nerededir?

<sup>46</sup>Nitekim, öteleme simetrisi söz konusu olduğunda, Noether teoremini kullanmamıza bile gerek yok:  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , böylece  $\frac{d}{dt} p_i = 0$ , burada  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  ifadesi momentumun  $i$ -inci bileşenidir.



**10.** Menteşeye göre çubuğa etki eden torkları ele alın. Hangi  $\alpha$  açısı için tepki kuvveti ile sürtünme kuvvetlerinin bileşkesi çubuğun tahtaya daha fazla bastırmasını sağlayacaktır?

**11.** İp  $\delta$  kadar uzatılırsa blok ne kadar alçalacaktır?

**12.** İpteki gerilmenin yatay bileşeninin  $T_x$  olduğunu varsayalım. Gerilmenin tavanın hemen yanındaki dikey bileşeni nedir? Ya ağırlığın hemen yanındaki? a) Ağırlığa ve b) Ağırlık & ip sistemine etki eden kuvvetler için denge koşulunu yazın (bkz. fikir no 4).

**13.**  $H \ll L$  olduğuna göre, açıkça ipin eğriliği küçüktür, ve de her yerde ipe çekilen teğetle yatayın yaptığı açı küçüktür. İp için yatay kuvvet dengesini kullanarak gerilmenin yatay bileşeni  $T_x$ 'i uzunluk  $l$ 'nin bir fonksiyonu olarak ifade edin ( $T_x$  ipin bütün havada asılı kısmı boyunca sabit kalmakla beraber,  $T_x$ 'in ipin havada asılı kısmı ile yerde bulunan kısmını birbirinden ayıran  $P$  noktasındaki değerine ihtiyacımız olacak). Havada asılı kısma çocuğun eliyle tuttuğu noktaya göre etki eden torkların dengesini yazın (yukarıda bahsedilenlere göre yerçekimi kuvvetinin kolu  $l/2$  olarak yaklaştırılabilir). Sonuçta, uzunluk  $l$  için ikinci dereceden bir denklem elde etmelisiniz.

**14.** 9 fikrini kullanın: dönen menteşenin referans sistemine geçin. a) 19 fikrini takiben, küçük bir sapma açısı  $\varphi$  için menteşeye göre tork dengesi koşulunu yazın (fikir no 2). Hangisi daha büyük tork oluşturur,  $m\vec{g}$  mi merkezkaç kuvveti mi (Alternatif olarak, probleme yaklaşırken 21 fikrin de kullanılabilirliğini dikkate alın.)? b) 21 fikrini takiben,  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$  küçük sapma açıları için, merkezkaç kuvvetinin (ki bu kuvvet elastik kuvvete benzemektedir!) ve yerçekimi kuvvetinin enerjisini kullanarak, net potansiyel enerjiyi ifade edin. 20 fikrine göre, sadece ikinci derecen terimleri ifade bulundurun. İki değişkenli bir ikinci derecen polinom elde etmelisiniz,  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$ .  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  dengesi potansiyel enerjinin minimumuna denk geliyorsa karardır, diğer bir deyişle denge noktasından herhangi bir sapmada polinom pozitif değerler veriyorsa bu durum iki tane eşitsizliğe yol açar. İlki,  $\varphi_2 = 0$  durumu göz önüne alındığında ( $\varphi_1 \neq 0$  olmakla beraber),  $\varphi_1^2$ 'nin katsayısının pozitif olması gerektiği sonucuna varılır. İkincisi, herhangi bir  $\varphi_2 \neq 0$  için, polinom kesinlikle pozitif olmalıdır. Yani eğer bu ifadeyi sıfıra eşitleyip onu  $\varphi_1$  için ikinci dereceden bir denklem olarak ele alırsak reel değerli herhangi bir kök olmamalıdır, bu da diskriminantın negatif olması gerektiği demektir.

**15.** Kalasın, kaldırma kuvvetinin büyüklüğünün değişmediği açısal pozisyon için 19 ve 22 fikirlerini uygulayın (yani dikey yönde kuvvet dengesi varsayarak). No 2 fikrinden, kütle merkezini pivot noktası olarak alın. Kaldırma kuvvetinin torkunu hesaplariken 11 ve 12 fikirlerinden yararlanın: eğer belirli bir bölgede yeri değişmiş su yoksa, yeri değişmiş su yoğunluğu sıfırdır ancak bu durum üst üste binmiş negatif ve pozitif kütle yoğunluklarıyla temsil edilebilir:  $0 = \rho_w + (-\rho_w)$ . Kalasın su altında kalan kısmının enine kesiti bir dikdörtgenin ve simetrik olarak konumlanmış iki dar üçgenin süperpozisyonuyla temsil edilebilir (bu üçgenlerden birinin negatif kütleli vardır).

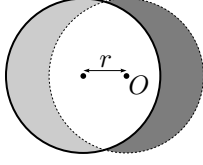
**16.** Kap & su sistemi yerçekiminden ve sıvının yatay yüzeyinden gelen dikey tepki kuvvetinden etkilenir. Sıvının tabanındaki basıncı bildiğimizden kabın kütleliğini dikeyde denge koşulundan bulabiliriz.

**17.** Pertürbasyon yöntemini kullanarak birinci düzeltmeyi hesaplamak için 51 olgusunu ile homojen ve doğrusal şekilde kayan bloğun referans sistemini kullanın: sürtünme kuvvetinin yönü ve büyüklüğünü bilerek  $\vec{w}$  ve  $\vec{u}$  yönündeki bileşenleri bulunabilir.  $\vec{w}$ 'nin işareti yarım periyot sonra tersine döner, bu sebeple ortalama alırken etkisi yok olur.

**18.** Dikey  $x$ -ekseninin orijinini okyanus yüzeyi üzerinde demir birinkitisinden uzak bir noktada seçin. Dünya'nın yerçekimi potansiyelinin sıfır referans noktası için  $x = 0$ 'ı seçelim (yani  $\varphi_{\text{earth}} = gx$ ), demir birikintisi içinse sonsuzda bir noktayı. Öyleyse, demir birikintisinden çok uzakta okyanus yüzeyindeki noktalar için yerçekimi potansiyeli sıfırdır. Geriye kalan demir birikintisinin hemen üzerinde  $x$ 'in bir fonksiyonu olarak potansiyelin ifadesini bulmak (süperpozisyon prensibini kullanarak) ve onu sıfıra eşitlemektir..

**19.** Platform referans sistemini kullanın. Küçük diskin eksenine göre tork dengesini ele alın (bu durumda eksen tarafından uygulanan kuvvetin kol uzunluğu sıfırdır). Diski eşit büyüklükte küçük parçalara bölün. Parçalara etki eden sürtünme kuvvetlerinin büyüklüğü aynıdır ve yönleriye diskin noktalarının lineer hızları boyuncadır (seçilen referans sisteminde). Diskin hareketi ani bir eksen etrafında dönme olarak gösterilebileceğinden eşmerkezli çemberler halinde sürtünme kuvveti vektörleri oluşur (ani dönme ekseninde merkezlenmiş). Açıkça çemberlerin eğriliği küçüldükçe (diğer bir deyişle ani dönme eksenini uzaklaştıkça) bu vektörlerin diskin merkezine göre net torku küçülür: ani dönme eksenini sonsuzdayken tork sıfırdır ve eşmerkezli çemberler paralel düz çizgilere dönüşür. Sonsuzdaki bir ani dönme eksenini hareketin öteleme anlamına gelir:  $\omega_3 = 0$  (çünkü herhangi bir noktanın lineer hızı  $v = \omega_3 r$  sınırlı bir değerdir ve  $r = \infty$ 'dur).

**20.** Ani dönme eksenini diskin ekseninden  $r = v/\omega$  mesafesindedir. Bir önceki soruyla aynı dilimleme tekniğini kullanın. Şimdi net kuvvetin hareket yönündeki bileşenini hesaplayın. Ani dönme eksenine göre simetrik noktalarda etki eden sürtünme kuvvetlerinin birbirlerini  $R - r$  yarıçaplı bütün bir çembersel bölge boyunca dengelediğine dikkat edin. Maalesef dengelenmemiş bölge için hesaplama yapılması gerekir. 'Dengelenmiş' bölgeyi  $R$  yarıçapına kadar (şekildeki çizgili çember) genişlettiğinizi hayal edin. Bu genişletilmiş dengeli bölgenin altında gerçekten dönen disk olmayan kısmı (şekildeki koyu gri hilal) iki diskin süperpozisyonu olarak ele alınabilir: bir tane saat yönünde dönen ve diğeri de zıt yönde dönen iki disk. Bu durumda saat yönündeki bileşen dengelemede rol oynarken zıt yönde dönen dengelenmemiş olarak kalır. Özet olarak, iki tane ince hilal şekilli bölge dengelenmemiş olur: bir tanesi gerçek diske karşılık gelirken (şekildeki açık gri olan) diğeri  $\vec{v}$ 'ye dik, saat yönü tersinde dönen bir disk (koyu gri). Bu bölgelerin genişliği her yerde  $r$ 'dir. Net kuvveti bulmanın en kolay yolu hilal şekilli bölge üzerinden polar koordinat  $\varphi$ 'yi kullanarak integral almaktır:  $|d\vec{F}| = A \cdot dS$ , burada  $dS$  yüzey elemanın alanıdır.  $dF_x = A \cos \varphi dS = B \cos^2 \varphi d\varphi$ ,  $F_x = \int dF_x = B \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$ .  $A$  ve  $B$  sabitlerinin değerleri nedir?



**21.** Kalem harekete başladığı anda kütle merkezinin sonsuz küçük yer değiştirme vektörü boyunca olan  $\vec{r}$  birim vektörünü ele alın. Kartezyen eksenlerinde koordinatlarını  $(x, y, z)$  olarak ifade edin, burada  $x$  kaleme paralel ve  $(x, y)$  düzlemi de eğik düzleme paraleldir. Uzaysal döndürme formüllerini kullanın ve bu koordinatları  $(x, y, z)$ 'ye göre  $z$  eksenini etrafında  $\varphi$  açısı kadar döndürülmüş yeni koordinatlar  $(x', y', z)$  cinsinden ifade edin, böylece  $x'$  eksenini yataydır. Yine aynı formülleri kullanarak  $\vec{r}$  birim vektörünün  $z'$  dikey bileşenini  $(x', y', z')$  koordinat eksenlerinde ifade edin. Bu eksenler  $(x', y', z)$  eksenlerinin  $x'$  etrafında  $\alpha$  açısı kadar döndürülmesiyle elde edilir.

**22.** İp, iki noktayı silindirin yan yüzü boyunca en kısa mesafede bağlamaktadır; silindir açıldığında bir dikdörtgendir. Silindirin yüzeyine dokunan ve ipin asılı kısmını içeren dikey düzlemi ele alın. Bu düzlem ve silindir düz bir  $s$  çizgisi boyunca birbirine dokunur. Silindiri açtığımızı hayal ederseniz,  $s$  çizgisi ile ip arasındaki açı silindirin eğim açısı  $\alpha$ 'ya eşittir. Bu verildiği takdirde  $l$ 'yi bulmak kolaydır. Ağırlık titreştiğinde, ipin iz düşümünü halen açılmış silindir üzerinde düz bir şekilde kalır. Bu sebeple asılı ipin uzunluğu (dolayısıyla da ağırlığın potansiyel enerjisi) herhangi bir titreşim durumunda silindirin yüzeyinin gerçekten silindirik olduğuna ya da düzlemsel dikey bir yüzey olarak açıldığına bağlı olmaz (bu bağımsızlık durumu,  $s$  ekseninin uzaysal yönelimi korunduğu sürece geçerlidir).

**23.** Kuvvet ve tork dengelesini anlatan iki denklem yazın, ardından da iplerin uzamaları arasındaki lineer bağlantıyı anlatan bir denklem daha yazın:  $T_1 - T_2 = T_2 - T_3$ .

**24.** İlk başta sadece dikey kuvvetler asılı bloğu etkiler, bu sebeple ilk yer değiştirme vektörü de dikeydir. Büyük bloğun ivmesi  $a_1$ , üzerindeki bloğunki  $a_2$  ve asılı bloğunki de  $a_3$  ise,  $a_1 + a_2 = a_3$  eşitliği geçerlidir. Şimdi Newton'ın 2<sup>nd</sup> yasasını her bir cisim için yazabilirsiniz. Dördüncü ve sonuncu bilinmeyen de ipteki gerilmedir.

**25.** Takoz-blok referans sistemine geçin. Sınır çizgisi durumunda,  $m$  kütleli top üzerine eylemsiz ve yer çekimi kuvvetlerinden dolayı etki eden net kuvvet sol eğime diktir (böylece top orada hareketsiz kalır). Toplara etki eden net kuvvetleri ele alın. Bu kuvvetlerin toplamın üzerlerinde hareketsiz buldukları yüzeylere dik bileşenleri  $\vec{F}_{\perp 1}$  ve  $\vec{F}_{\perp 2}$ 'dir. Bu bileşenler toplara etki eden  $\vec{N}_1$  ve  $\vec{N}_2$  tepki kuvvetlerine eşittirler ve bu sebeple yatayda takoz-blok sistemi için kuvvet dengesinin sağlanması adına büyüklükleri eşit olmalıdır ( $F_{\perp 1} = F_{\perp 2}$ ).

**26.** Takozun  $\xi$  yerdeğişimini sistemin pozisyonunu anlatan koordinat olarak seçin. Takoz  $\xi$  kadar hareket ederse, blok da takozu göre aynı miktarda hareket eder çünkü ip uzayamaz. Ayrıca kinetik enerji  $\Pi = mg\xi \sin \alpha$  kadar değişir. Takozun hızı  $\dot{\xi}$  ve bloğunki de  $2\dot{\xi} \sin \frac{\alpha}{2}$ 'dir (hız vektörleri toplanarak elde edilir, iki  $\dot{\xi}$  vektörü birbiriyle  $\alpha$  açısı yapmaktadır), bu sebeple toplam kinetik enerji  $K = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2(M + 4m \sin^2 \frac{\alpha}{2})$  olur. Ardından  $\Pi'(\xi) = mg \sin \alpha$  ve  $\mathcal{M} = M + 4m \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  bulunur; toplamı aranan cevabı verir.

## 6. İPUÇLARI

**27.** Tekrardan, takozun yerdeğişimini  $\xi$  koordinatı olarak alalım. Eğer takozun yüzeyi boyunca bloğun yerdeğişimi  $\eta$  ise sistemin kütle merkezinin hareketsiz kalması gerektiğinden  $\eta(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2) = (M + m_1 + m_2)\xi$  bulunur. Buradan,  $\eta$ ,  $\xi$ 'nin bir fonksiyonu olarak elde edilebilir, ancak formülleri kısa tutmak adına bu ifadeyi her yerde yerine koymamak daha iyidir. Bloğun kinetik enerjisi, yatay  $[\frac{1}{2}m_i(\dot{\xi} - \dot{\eta} \cos \alpha_i)^2]$  ve dikey  $[\frac{1}{2}m_i(\dot{\eta} \sin \alpha_i)^2]$  enerjiler toplamı olarak yazılabilir.

**28.** Enerji korunmasını yazarken bloğun hızının silindirin hızının yatay bileşeninin iki katı olduğuna ve silindirin yatay hız bileşeninin dikey bileşenine de eşit olduğuna dikkat edin (neden durum böyledir?). Newton'ın 2. yasasının basamağın üst köşesinden ve silindirin merkezinden geçen eksene göre iz düşümünü alın: bu eksen hem silindirle blok arasındaki tepki kuvvetine diktir hem de silindirin teğet ivmesine. İkinci soru: iki tepki kuvvetinin oranı sabittir (neden?). Peki bu sabit nedir? İpucu: Silindirin ve bloğun yatay ivmelerini karşılaştırın, ayrıca unutmayın ki Newton'ın 2. yasası geçerlidir, bu sebeple aynı anda sıfır olacaklardır.

**29.** Newton'ın 2. yasasının tepki kuvveti boyunca olan eksende iz düşümünü almırsa yörüngenin yay şeklindeki bölgesinde tepki kuvvetinin, yörüngenin en alt noktasında en küçük olduğu görülür (Orada, merkezci ivme en büyüktür, yerçekimi kuvvetinin eksen boyunca olan bileşeni ise en küçüktür.).

**30.** 'Küçük tahta & blok' sisteminin enerjisi her zaman korunur. Momentumsa sadece küçük tahta en alt noktayı geçtikten sonra korunmaya başlayacaktır. Küçük tahta en alt noktaya ikinci kez vardığında bloğun hızı maksimum olacaktır (neden?).

**31.**  $\vec{P}$  için no 46 fikrini uygulayalım: Sistemin net momentumu  $P = \omega l m + 2\omega l M$ , net kuvvet ise  $F = (m + M)g - T$ 'dir. Dönme göz önünde bulundurularak benzeri uygulanabilir: en soldaki topun ilk konumuna göre, açısal momentum  $l(2\omega l)M$  (hızı  $2\omega l$ , hız kolu ise  $l$ 'dir), net tork da  $(T + Mg)l$ 'dir. Şimdi, 46 nolu fikirde verilen formül için açısal ivme  $\varepsilon = \dot{\omega}$ 'ya ihtiyaç vardır. Açısal ivme 6 nolu yöntem kullanılarak bulunabilir:  $\Pi = l\varphi(m + 2M)$ ,  $K = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 l^2(m + 4M)$ . Başka bir çözüm yolu: ivmelerin oranı 1:2'dir, dört bilinmeyen vardır (iki tepki kuvveti, ivme ve ip gerilmesi), ancak elimizde dört de denklem vardır: üç kuvvet dengesi (her iki top ve çubuk için) ve bir tork dengesi (çubuğun sol uç noktasına göre).

**32.** 6 nolu yöntem: genelleştirilmiş koordinat  $\xi$  için ipin uç noktasının yer değişimi kullanılabilir. 34 ve 12 nolu fikirler: sistemin kütle merkezinin  $y$  koordinatının değişimi  $\xi \rho h / M$ 'dir (burada  $h$  ipin uç noktalarının yükseklik farkı,  $M$  sistemin toplam kütlelidir;  $\xi \ll h$  olduğu varsayılmıştır.).  $x$  koordinatı içinse yerdeğişimi  $2\xi \rho R / M$ .

**33.**  $\langle T(1 + \cos \alpha) \rangle = 2mg$ ,  $T = \langle T \rangle + \tilde{T}$ , burada  $|\tilde{T}| \ll T$ 'dir. 20 nolu fikre dayanarak en küçük terim  $\langle \tilde{T} \alpha^2 \rangle$ 'yi ihmal edin ve  $\langle \alpha^2 \rangle > 0$  olduğunu göz önünde bulundurun.

**34.** İki seçenek ele alınmalıdır: ya bütün cisimler birlikte hareket eder, ya da en sağdaki büyük blok ayrı hareket eder. (a) Üç farklı bloğun da ayrı hareket ettiği, ya da (b) en soldaki büyük bloğun ayrı hareket ettiği durumlar neden gerçekleşmez?

## 6. İPUÇLARI

- 35.** Çarpışmadan sonra topların yörüngeleri birbirini kesen dik çizgilerdir. İlk yörüngeyle yeni yörüngelerin yaptığı açı çarpışmanın merkezden ne kadar uzakta gerçekleştiğine bağlıdır.
- 36.** Yaklaşık merkezi olmayan hareket için: ilk olarak vurulacak topun momentumunun yönü ne olacaktır? Şimdi 52 nolu fikri tekrar uygulayın. Merkezi hareket: Çarpışmadan sonraki hızları toplardan birine aktarılmış momentumun yatay bileşeni  $p_x$  cinsinden ifade edin. Aktarılan dikey momentum  $p_y$  nedir? Enerji korunması  $p_y$ 'nin bulunabileceği bir denklem vermektedir (enerjiyi  $p^2/2m$  olarak ifade etmek daha uygundur).
- 37.** Grafik  $n$  tane kesişen düz çizgi gibi gözükmektedir, iki çizginin kesişim noktası iki topun çarpışmasına denk gelmektedir (her topun hareketinin grafiği zikzaklı bir çizgidir; bir çarpışma noktasında iki zikzaklı çizginin açısı birbirine değer, böylece iki düz çizgi kesiyormuş gibi görünür.).
- 38.** Kütle merkezine göre ilk hızlar:  $\frac{mv}{m+M}$ ,  $\frac{Mv}{m+M}$ . Son hızlar ise sıfırdır, sürtünme iş yapar:  $\mu mgL$ .
- 39.** Görsele dayanarak (belirli bir sabit çarpına kadar) momentumların yönü ve büyüklüğü direkt elde edilir, ancak hangi momentumun hangi topun olduğu söylenemez. Ok ile işaretlenen topun çarpışmadan sonra nereye gideceğini bulmak zorundasınız. 27 nolu olgu üç seçenektan birini seçmenize yardımcı olacaktır.
- 40.** Enerji: bir  $dt$  zaman sonra sıvının dağılımı değişecektir: ortada hala biraz su vardır fakat belli bir  $dm$  kütlesi su yüzeyinin seviyesinden musluğun seviyesine doğru yer değiştirmiştir (ve sonrasında da musluk boyunca), böylece sistemin potansiyel enerjisindeki değişim  $gH \cdot dm$ 'dir. Momentum: varilin içindeki su duvarlardan  $\rho gHS \cdot dt$  toplam momentumunu kazanır. Bu momentum  $\rho Sv \cdot dt$  kütlesi ile su akışına aktarılır.
- 41.** Enerji korunmaz: kum tanecikleri kayar ve sürtünmeye maruz kalır.  $dt$  zaman aralığında bantlı taşıyıcının üzerine düşen kumlara bant tarafından  $dp = v \cdot dm = v\mu \cdot dt$ 'lık momentum aktarılır: yeni düşen kum ile bant arasındaki kuvvet  $F_1 = dp/dt$ 'dir. Hali hazırda bantın üzerindeki kuma banta paralel olan sürtünme kuvveti,  $F_2 = mg \cos \alpha$  tarafından dengelenmiş  $mg$  kütle çekim kuvveti etki eder, burada  $m = \sigma L$  bantın üstündeki kumun kütlesidir ve  $\sigma v = \mu'$ 'dur. Minimize etme işlemi  $v$  üzerinden yapılmalıdır.
- 42.** Çarpışma boyunca  $\Delta p_{\perp} = \sqrt{2gh}$ 'dir.
- 43.** Tepe boyunca olan yolun  $dl$  uzunluğunda küçük bir kısmını ele alınız. Potansiyel enerjinin değişimine ek olarak sürtünmeyi aşmak için yapılan iş  $dA_h = \mu mg \tan \alpha \cdot dl$ 'dir.  $dA_h = C \cdot dx$  olduğunu buluruz, burada  $C$  sabittir. Bütün yol üzerindeki  $dl$ 'leri toplarsak  $A_h = C\Delta x$  olduğunu buluruz.
- 44.** Kinetik enerji  $K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + M\dot{x}^2$ 'dir, burada  $x$  eğimli yüzeydeki yer değişimidir;  $\Pi = (M+m) \sin \alpha$ .  $a$  ivmesini bulmuşken,  $a$  ivmesi ile hareket eden referans sistemine (silindirin) geçerez (7 ve 8 nolu Fikirler), burada blok yer çekiminden dolayı kayaklanan efektif ivme ile yer değiştirir — olabildiği kadar az.
- 45.** 61 ve 62 no.lu Fikirlere göre, çubuğun çarpışmadan önceki momentumu  $L_0 = Mlv - \frac{1}{3}Ml^2\omega$ ; çarpışmadan sonra ise  $L_1 = Mlv' - \frac{1}{3}Ml^2\omega'$ ;  $L_1 = L_2$ . Enerji için olan ifade ise  $K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{6}Ml^2\omega^2$ 'dir. Sonunda olma koşulu:  $v' + l\omega' = 0$  (eğer dönmenin yönü şekilde belirtildiği gibiyse  $\omega'$ 'yı pozitif kabul ederiz.)

- 46.** Çarpışmadan önce çarpışma noktasına göre açılal momentum:  $mv(x - \frac{l}{2}) - I_0\omega$ , burada  $v = \omega \frac{l}{2}$  ve  $I_0 = \frac{1}{12}ml^2$ .
- 47.** Ani dönme eksenini silindir ve zeminin temas noktalarından geçiyor; eksenin kütle merkezinden uzaklığı hiç değişmiyor dolayısıyla Fikir 65 'i kullanabiliriz;  $I = \frac{3}{2}mR^2$ .
- 48.**  $z$  eksenini yukarı doğru alalım (bu durumda açılal momentumların işaretleri düzelecektir.). Sondaki eylemsizlik momentin  $x$  eksenine göre  $-\frac{7}{5}mv_yR - muR$ ,  $y$  eksenine göre ise  $\frac{7}{5}mv_xR$  'ye eşittir.
- 49.** Çarpışmadan hemen sonra dambılların kütle merkezleri hareketsiz kalır. Çarpışan topların hızları yön değiştirirken çarpışmayan topların hızlarında bir değişiklik olmaz. İki dambıl da sarkıç gibi davranır ve birinciye benzer şekilde ikinci çarpışma gerçekleştikten sonra bir titreşim periyodunun yarısını tamamlarlar.
- 50.** Kum tanecikleri silindirin eksenine dik olan düzlemde kütle çekimi ivmesi  $g \cos \alpha$  olan bir kütle çekimi alanındaki  $l = R$  uzunluktaki bir matematiksel sarkaç gibi titreşim yaparlar. Eksen boyunca sabit hızlanma gerçekleşir ( $a = g \sin \alpha$ ). Eğer oluktan geçme süresi titreşim periyodunun yarısının bir tam sayı katıysa odaklanma gerçekleşir.
- 51.** Denge konumunu inceleyerek kütle merkezinin askının simetri ekseninin üzerinde olduğunu görürüz. Üç askı noktası da Fikir 69 'da belirtilen iki eşmerkezli çemberin üzerinde bulunmalıdır. Çemberlerin merkezleri (askının kütle merkezi) askıların simetri ekseninin üzerindeki kenarları tarafından sınırlanan bölgenin içerisinde bulunmalıdır, bu durumda çemberlerden birinde üç noktadan en az ikisi bulunmalıdır. Bütün bu şartları sağlayan yalnızca bir çift çember vardır. Çemberlerin yarıçapları  $l_1$  ve  $l_2$  'yi trigonometri kullanarak hesaplayarak sarkacın indirgenmiş uzunluğu  $l_1 + l_2$  'yi bulur bunu kullanarak da titreşim periyodunu hesaplayabiliriz.
- 52.** Düşen topun ivmesini kullanarak hareket eden suyun etkin kütlesi bulunabilir. Yükselen baloncukların etkin kütlesi gazın kütlesi ile tam olarak aynıdır ve suyun kütlesine kıyasla ihmal edilebilecek küçüklüktedir.
- 53.** Su akıntısı hayali olarak iki parçaya ayrılabilir: soldaki akıntı oluğa değdiği anda sola, sağdaki ise sağa döner. Bu sayede iki hayali 'su borusu' oluşur. İkisinde de statik basınç dış basınca eşittir (çünkü çevreleyen yüzeyde suyun dış yüzeyi bulunur): Bernoulli Yasası'na göre suyun hızı değişmez. Momentumun yatayda korunmasından dolayı sağa ve sola akan akıntıların momentumlarının toplamının baştaki akıntının yatay bileşenine eşit olması gerekir. Süreklilikten dolayı  $\mu = \mu_v + \mu_p$  olduğunu hatırlayınız.
- 54.** Sürekliliğe göre  $(u + v)(H + h) = Hu$  sabittir, burada  $h = h(x)$   $x$  noktasındaki suyun yüksekliğidir ve  $v = v(x)$  ise hızdır. Yüzeyin yakınındaki hayali bir "tüp" için Bernoulli Yasası'nı yazabiliriz (yüzeyden çok uzakta olmayacak şekilde yüzeyle akıntı çizgileri arasındaki alan):  $\frac{1}{2}\rho(u + v)^2 + \rho g(H + h) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gH = \text{Sabit}$ . İkinci dereceden küçük terimleri ihmal edebiliriz ( $v^2$  ya da  $vh$  içeren terimleri)
- 55.** Cismin faz uzayındaki yörünesi, kenarları  $L$  ve  $2mv$  olan yatay bir dikdörtgendir; burada  $L$  blokla duvar arasındaki mesafedir böylece adiyabatik invaryans  $4Lmv$  olur.

**56.** Tork eşitliğine dikkat ediniz. Toplam normal ve sürtünme kuvvetleri için, bunları uzattığınız zaman, kesişim noktaları kütle merkezinin üstünde olmalıdır.

**57.** Dönme hareketi için normal kuvvetlerinin kesişim noktasına göre Newton'un 2. Yasası'nı yazalım: böceğin açısız momentumu  $L = mvl \sin \alpha \cos \alpha'$ 'dir, açısız momentumun değişim hızı böcek üzerine etki eden yer çekimi kuvvetinden kaynaklanan torka eşit olacaktır (diğer kuvvetlerin kuvvet kolları sıfırdır). Periyodu hesaplarken ivmenin negatif olduğuna ve alttaki uç noktadan olan uzaklığa orantılı olduğuna dikkat ediniz, bu harmonik bir salınımla karşı karşıya olduğumuz anlamına gelmektedir.

**58.** Engelleme, normal ve sürtünme kuvvetlerinin net kuvveti çubuğu aşağıya çekiyorsa gerçekleşir.

**59.** Engelleme gerçekleştiği zaman normal ve sürtünme kuvvetleri dışındaki tüm kuvvetleri ihmal edebiliriz. Gerçekleştiğini varsayalım. O zaman sağdan ve soldan etki eden net sürtünme ve normal kuvvetleri birbirlerini hem kuvvet açısından hem tork açısından dengelemişlerdir, aynı düz çizgi üzerindedir ve büyüklükleri eşit. Böylece sürtünme ve normal kuvvetlerinin net kuvveti ve yüzey normali arasındaki açıyı bulmuş oluruz.

**60.** Tahta  $\varphi$  açısı kadar döndüğünde temas noktasına göre tahtaya etki eden torkun yönünü inceleyiniz: Temas noktası  $R\varphi$  kadar kayar, kütle merkezinin yatay koordinatı temas noktasının orijinal konumundan  $\frac{h}{2}\varphi$  kadar kayar.

**61.** Kap ve su üzerine yüzey tarafından etki eden tek kuvvet hidrostatik basınca ( $\rho gh\pi R^2$ ) eşittir; bu kuvvet yer çekimi kuvvetini ( $(m + \rho V)g$ ) dengeler.  $H = R - h$ 'dir.

**62.** The gravitational potential of the centrifugal force is  $\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ , where  $r$  is the distance from the rotation axis.

**63.** Büyük bir bloğun ( $a$  ivmesi ile hareket eden) referans sistemini varsayınız. Efektif kütle çekiminin (net kütle çekim kuvveti ve net eylemsiz kuvveti) yönü nasıl olmalıdır?  $a$  ne kadardır? Bu referans sisteminde küçük blok ne kadardır bir ivme ile düşer? İpteki gerilme kuvveti  $T$  ne kadardır? Bu soruların cevaplarını bilerek büyük blok için denge koşulunu yazabiliriz  $ma = T(1 - \sin \alpha)$ .

**64.** Kürenin yer değişimi (eğik düzlemden aşağı) için genelleştirilmiş koordinat olarak  $\xi$  kullanalım. Kürenin yer değişimi (diğer eğik düzlemden) ne kadardır? Açıkça,  $\Pi = (m - M)g\xi \sin \alpha$ . Cisimler arasındaki tepki kuvveti Newton'un 2. yasaının eğik düzlemlerin yönünde iz düşümlerini kullanarak bulunabilir.

**65.** Büyük silindirin yer değişimi  $\xi$ , ortadaki ve soldaki silindirlerin de yatay yer değişimleri sırasıyla  $x$  ve  $y$  olsun. Kütle merkezinin hareketsiz olduğu bilindiğinde bunlar arasında nasıl bir ilişki vardır? Çubukların uzunluğunun değişmediği bilindiğinde bunlar arasında nasıl bir ilişki vardır? Bulunan iki eşitlikten  $x$  ve  $y$ , dolayısıyla da  $\xi$  bulunabilir. Eğer yer değişimi çok ufak varsayarsak, ortadaki silindirin dikey yer değişimi  $z$  ile çubuğun yataydaki iz düşümünün uzunluğunun  $\xi - x$  arasında nasıl bir ilişki vardır? Bunların sonuçları bilinerek Yöntem 6 doğruca uygulanabilir.

**66.** Kürenin küçük yer değişimi  $\xi$  nereye yönelmiş (bkz. Fikir 31)?  $\xi$  cinsinden yüzüğün yer değişimi nedir? Yöntem 6'yı kullanınız.

**67.** Fikir 40'ı ve enerji korunumunu birlikte, radyal yönde Newton'un 2. yasaındaki kuvvetlerin ve ivmelerin izdüşümü ile kullanınız.

**68.** Kürenin ivmesini bulmak için kinematik bölümden bazı fikirleri kullanalım (K1, K29 and K2:  $v$  hızı ile hareket eden referans sisteme geçerek kürenin ivmesinin çubuk boyunca olan bileşenini buluruz ve yatay ivmenin sıfır olacağına dikkat ederek, trigonometri kullanarak, ivmenin büyüklüğünü buluruz). Şimdi de Newton'un 2. yasaını kullanalım.

**69.** Kürenin hızı  $v$  'yi kullanarak incelenen anda bloğun hızını (yataydaki hızların eşit olduğunu aklımızda bulundurarak) bulabiliriz. Fikir 40 'ı kullanarak bloğun (ve dolayısıyla kürenin) yataydaki ivmesinin sıfır olduğunu bulabiliriz; Newton'un 'un 2. Yasası'nı kürenin yatay yöndeki hareketi için uygularsak çubuktaki gerilmenin sıfır olduğunu gösterebiliriz. Enerji korunumundan yararlanarak  $v^2$  'yi ifade edebilir ve Newton'un 2. Yasası'nı çubuk boyunca olan ekseninde küre için uygulayarak içinde cevabın saklı olduğu bir denkleme ulaşırız.

**70.** Newton'un 2. Yasası'nı kullanarak sistemin kütle merkezinin sağa mı yoksa sola doğru mu (kütle merkezinin hareket etmemesi iki olayın aynı anda gerçekleşmesi olarak incelenebilir) hareket edeceğine karar verin.

**71.** İlk bölümü yanıtlamak için hızı dik yöndeki kuvvetin sıfır olduğunu gösteriniz (Yöntem 3 'ü ve Fikir 27 'yi kullanınız). İkinci bölüm içinse Yöntem 3 'ü ve Fikir 56 'yı kullanınız.

**72.** İpin uzunluğundan dolayı yatayda kuvvet olmayacak yani momentumun yatay bileşeni ve de enerji korunacak. Bu duruma karşılık gelen iki denklemden alttaki kürenin üsttekinin yüksekliğine ulaştığı durumda sınır hızın  $v = v_0$  olduğu bulunabilir. Bu noktada hızın dikey bileşeninin sıfır olduğuna dikkat ediniz, Fikir 44 ile karşılaştırınız.

**73.** Fikir 51 'i kullanın. Seçenekler: tüm bloklar bir arada durur; her şey kayar; üstteki blok kayar ama alttaki ikisi bir arada kalır (neden üstteki ikisinin bir arada kalması ve alttakinin kayması mümkün değildir?).

**74.** İki cisim çarpıştığında (sınırlı bir çarpışma süresi boyunca) hangi korunum yasası etkili olur — çarpışmayı esnek mi yoksa esnek olmayan çarpışma mı kabul ediyoruz (momentum kaybedilebilir mi edilirse nerede edilir? Eğer esnek olmayan çarpışma kaybedilen enerji nereye gider?)? Fikir 58 'e bakınız. Çarpışmadan sonra: iki çocuğun ortak ivmeleri sabit olacak, ilk ve son hızları bilerek uzaklığı bulmak basit bir kinematik problemine dönüşür.

**75.** Halatın dikeye paralel olduğu anda hızın maksimum olduğunu kanıtlayın. (çubuğun dönme açısı için Fikir 44'ü kullanarak çubuğun açısız hızının o anda sıfır olduğunu gösterin, Fikir 61'i kullanın). Geriye sadece enerji korunumunu kullanmak kalıyor ( $\omega = 0$  olduğunu unutmayın). İvme için Fikir 44'i kullanalım ve merkezin yataydaki ivmesinin sıfır olduğunu göz önünde bulunduralım (söz konusu anda yatay kuvvet bulunmamakta). Buna ek olarak kütle merkezinin dikey koordinatı, çubuğun uç noktalarının koordinatlarının aritmetik ortalamasıdır,  $x_O = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ ; zamana göre türevini alırsak

$\dot{x}_O = \frac{\dot{x}_A}{2}$  ve  $\ddot{x}_O \equiv a = \frac{\ddot{x}_A}{2}$  denklemlerini elde ederiz ( $x_B$  sabit). Dolayısıyla  $O$  noktasının ivmesi, çubuğun üst ucu olan  $A$  noktasının dikeydeki ivmesinin yarısına eşittir; bu,  $A$  noktasının asıldığı nokta etrafındaki çembersel hareketi sırasındaki ivmesinin radyal komponentidir. Son olarak, gerilme kuvveti  $T$  için bize gereken iki denklemden birini elde ettik,  $T + N - mg = ma$ . İkinciye elde etmek için çubuğun  $O$  noktası etrafındaki açısal hareketini incelemeliyiz. Yeni sistemimiz, herhangi bir anda, açısal olarak  $v$  hızı ile sağa,  $a$  ivmesi ile yukarı hareket etmektedir. Kütle merkezine göre tork sadece  $T$  ve  $N$  kuvvetleri dolayısıyla oluşur (yer çekimi kuvvetinin ve iç kuvvetlerin kuvvet kolu sıfırdır). Artık Newton'ın 2. yasasının yardımıyla  $T - N$  ile çubuğun açısal ivmesi arasında bir ilişki bulunabilir. Açısal ivmeyi bulmak için laboratuvar referans sisteminde  $A$  ve  $O$  noktalarının hızlarının eşit olduğu gerçeğini kullanalım. Gerçekten iki hız da yatay ( $A$  noktasının dikeydeki hızı sıfır çünkü yörüngesinin en alt noktasında ve  $\dot{x}_O = \frac{\dot{x}_A}{2}$ ) ve kinematikte bahsi geçen Fikir 35'i (hızların çubuk boyuncaki iz düşümleri eşit olmalı) kullanarak hızların eşit olması gerektiğini çıkarabiliriz. Yani hareket eden referans sisteminde  $A$  noktasının hızı ve dolayısıyla merkezci ivmesi sıfır. Bu sebeple ivme çubuğa dik olmalı, biliyoruz ki bu ivmenin yatay komponenti  $2a$  ve bunu kullanarak ivmeyi bulabiliriz. İvmeyi bulduktan sonra rahatça çubuğun açısal ivmesini bulabiliriz.

**76.** Anlık dönme eksenini bulun (kütle merkezinden uzaklığının  $\frac{1}{2}$  olduğuna emin olun). Kütle merkezinin, merkezi zemin ile duvarın kesiştiği noktada olan bir çember boyunca hareket ettiğini kanıtlayın (polar koordinatımız duvar ile çubuk arasındaki açı olsun ve  $\varphi$  ile gösterelim). Kinetik enerjiyi, paralel eksen (Steiner) teoremini kullanarak ve enerji korunumunu  $\omega^2 = f(\varphi)$  şeklinde ifade ederek (Yöntem 6'yı kullanarak  $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{1}{2}f'(\varphi)$  denklemini elde ederiz), genel koordinat  $\varphi$ 'nin zamana göre türevi  $\dot{\varphi}$  cinsinden yazın. Duvarın çubuğa uyguladığı normal kuvveti sıfır olduğunda kütle merkezinin ivmesi sadece dikey boyunca olur: Bu koşulu kütle merkezinin radyal ve teğetsel ivmelerini kullanarak çembersel yörüngede ifade edin (sırasıyla  $\frac{1}{2}\varepsilon$  ve  $\frac{1}{2}\omega^2$ ) ve  $\varphi$ 'yi bulmak için bunu kullanın.

**77.** Fikir 64'e dayanarak  $\omega = 6v/l$  buluruz. Enerji ve momentum korunumunu kullanarak pakın çarpışmadan sonraki hızını elebiliriz ve kütle oranını ifade edebiliriz.

**78.** Yüzeye dik kuvvetler elastik kuvvetleri olduğundan çarpışma boyunca dikeyde enerji korunur: çarpışmadan sonra hızın belirtilen bileşeni çarpışmadan öncesi ile aynıdır. Diğer iki bileşen olan yatay ve açısal hızları bulmak için Fikir 64'ten bir eşitlik elde edebiliriz. İkinci eşitlik topun yüzeyinin hızının sıfır olduğu ( $a$ ) koşulundan elde edilir (kayma yok; ( $b$ ) koşulu için eşitlik Fikir 60'tan elde edilebilir).

**79.** Fikir 51'i kullanarak kayma ve yuvarlanma durumlarını inceleyiniz. Son durumda Fikir 65'i kullanarak cevaba en hızlı yoldan ulaşabilirsiniz.

**80.** Hız, enerji ve momentum korunumu yasalarından bulunabilir (halkanın öteleme hareketi yaptığını dikkat ediniz). İvmeyi bulmak için bloğun merkezci ivmesinin kolayca bulunabileceği halkanın eylemli referans sistemini kullanmak uygun olur. Bloğun radyal dengesi blok ve halka arasındaki tepki kuvvetini verir (eylemsiz kuvveti unutmayın!); halkanın yatay denge koşulu ivmeyi bulmak için bir eşitlik sağlar.

## 7. CEVAP ANAHTARI

**81.** Bloğun hızının yaklaşık olarak sabit olduğunu varsayalım. Belirli bir  $t_l$  süresi için zemin bloğa göre sola doğru kayar. Bu sürede aynı zamanda sürtünme kuvvetinin oluşturduğu momentum da sola doğrudur. Geriye kalan  $t_r$  süresi boyunca zemin sağa doğru kayar ve de momentum da sağa doğru olur. Denge koşulu iki momentumun büyüklüklerinin aynı olmasıdır; dolayısıyla  $t_l/t_r$  oranının denge değerini buluruz. Sonrasında da grafiği kullanarak bu oranın gereken değeri için hızı buluruz.

**82.** Su küreklere doğru aktıkça küreklerin dikey yönde kazandığı hızı,  $u$ , su da kazanacak. Bunu kullanarak küreğe birim zamanda aktarılan momentumu (yani kuvveti) hesaplayabiliriz. Bunun  $F \propto (v-u)$  ifadesine orantılı olduğunu göreceğiz. Artık gücün maksimum değeri,  $Fu$ , kolaylıkla bulunabilir.

**83.** Problem, kalasın referans sisteminde Problem 52 ile aynıdır.

**84.** Vagonun (eylemli) referans sisteminin geçelim. Bu referans sisteminde etkin kütle çekiminin büyüklüğü  $\sqrt{a^2 + g^2}$  'dir ve yönü dikeyden küçük bir açıyla sapar. Yük titreşim yapacak fakat eğer sonda durma anında kablo dikeyse ve yükün hızı sıfıra eşitse sabit kalacaktır. Karşılık gelen konumun titreşimdeki maksimum sapma noktası olması muhtemeldir. Dolayısıyla titreşim genliği hızlanma ve yavaşlama sırasında aynıdır bundan dolayı yavaşlama başladığı anda da kablunun dikey konumda olması gerekir. Bu durumda hızlanma süresi ve titreşim periyodu birbirine nasıl bağlıdır?

**85.** Eğer şok dalgası, bahsi geçen cismin ve dalga cephesinin kesişim alanı  $S$  olduğu yerde ise cisme etki eden kuvvet nedir? Şok dalgası cismi geçtiğinde cismin (neredeyse) aynı yerde kaldığını varsayalım.  $dt$  süre boyunca aktarılan momentum cismin kesit alanı ve dalganın cephesi tarafından katedilen mesafe  $dx = c_s \cdot dt$  kullanılarak bulunabilir.  $S \cdot dx$ 'in hacim elemanı olduğuna dikkat ediniz. Son olarak da bütün aktarılmış momentum üzerinden integralini alırız.

**86.** Çubuk (ince olduğundan ve çelikten yapıldığından, çelik de elastik olduğu için) yay gibi davranacaktır. Soldaki küre sabit olan küreyle çarpıştıktan sonra, sağdaki küre  $v_0$  hızı kazanacaktır soldaki de sabit kalacaktır. Sonrasında da kürelerden ve yaydan oluşan sistem kendi kütle merkezi etrafında titreşmeye başlayacaktır. Kütle merkezinin hızı nedir? Kendinizi yarım periyot sonra sol kürenin yine çarpışma yapmayacak kadar uzakta olduğuna ikna ediniz. Sistemin titreşimleri azar azar sönüme uğrayacaktır – bundan dolayı enerjinin bir kısmı kayıp olacaktır.

## 7 CEVAP ANAHTARI

1.  $\arcsin \frac{R\mu}{(R+l)\sqrt{\mu^2+1}}$ .

2.  $\arcsin \frac{m}{M+m} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$ .

3.  $mg/2$ .

4. a)  $\mu mg/\sqrt{1+\mu^2}$ ; b)  $mg \sin(\arctan \mu - \alpha)$ .

5.  $\mu \geq \frac{|g \sin \alpha - a \cos \alpha|}{g \cos \alpha + a \sin \alpha}$ , if  $g + a \tan \alpha > 0$ .

6. a)  $\omega^2 R \geq g\sqrt{1+\mu^{-2}}$ ;

b)  $\omega^2 R \geq g\sqrt{1+\mu^{-2}}$ , if  $\mu < \cot \alpha$  ve

$\omega^2 R \geq g(\cos \alpha + \mu^{-1} \sin \alpha)$  if  $\mu > \cot \alpha$

7.  $v = 3\sqrt{gR}$
8.  $v/2$ .
9.  $\tan 2\alpha = h/a$
10.  $\mu_1 \geq \sqrt{l^2 - h^2}/h$
11.  $3mg$
12.  $2 \arctan[(1 + \frac{m}{M}) \cot \alpha]$
13.  $\sqrt{2HL\mu + \mu^2 H^2} - \mu H \approx \sqrt{2HL\mu} - \mu H \approx 7.2 \text{ m}$ .
14. a)  $\omega^2 < g/l$  ; b)  $\omega^2 < (2 - \sqrt{2})g/l$
15.  $\frac{1}{2}(1 - 3^{-1/2})\rho_v \approx 211 \text{ kg/m}^3$
16.  $\frac{\pi}{3}\rho R^3$
17.  $v/\sqrt{\mu^2 \cot^2 \alpha - 1}$
18.  $\frac{4}{3}\pi G r^3 \Delta\rho/g(r+h) \approx 0.95 \text{ cm}$
19.  $-\omega$
20.  $\mu mgv/\omega R$
21.  $\cos \varphi \tan \alpha < \tan 30^\circ$
22.  $L - \pi R/2 \cos \alpha$ ;  $2\pi\sqrt{L/g}$
23.  $\frac{1}{12}mg, \frac{1}{3}mg, \frac{7}{12}mg$
24.  $mg/(2M + m)$
25.  $m < M \cos 2\alpha$ .
26.  $mg \sin \alpha/[M + 2m(1 - \cos \alpha)] = mg \sin \alpha/[M + 4m \sin^2 \frac{\alpha}{2}]$ .
27.  $g \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{(m_1 + m_2 + M)(m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$ .
28.  $mg(5\sqrt{2} - 4)/6$ ; Eş zamanlı ayrılırlar.
29.  $\cos \alpha \geq \frac{1}{3}(2 + v^2/gR)$
30.  $2 \frac{m}{M+m} \sqrt{2gR}$
31.  $mMg/(m + 4M)$
32.  $F_x = 2Rap, F_y = (m + \rho L)g - \rho(L - \pi R - 2l)a$ , burada  $a = \rho g(L - \pi R - 2l)/(m + \rho L)$ .
33. İtilmemiş olan.
34. Eğer  $F \leq 2\mu mg \frac{m+M}{2m+M}$ :  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \frac{F}{M+m}$ ; aksi takdirde  $a_1 = \frac{F}{M} - \mu g \frac{m}{M}$ ,  $a_2 = \mu g \frac{m}{2m+M}$ .
35. Yarım daire şeklinde.
36. (a)  $v/5$ ; (b)  $v/4$ .
37.  $n(n-1)/2$
38.  $\sqrt{2\mu gL(1 + \frac{m}{M})}$
39. 3.5; sağ aşağıdan geliyordu.
40. A:  $\sqrt{2gh}$  ;  $\sqrt{gh}$ .
41.  $2R\mu\sqrt{gl \sin \alpha}$ ,  $\sqrt{gl \sin \alpha}$ .
42.  $u - \mu\sqrt{2gh}$ .
43.  $mg(h + \mu a)$ .
44.  $\arctan \frac{2}{5} \approx 21^\circ 48'$ .
45. (a)  $(3v - \omega l)/4$ ; (b)  $(v - \omega l)/2$ .
46. Sopayı tutan elden  $2l/3$  uzaklıkta, burada  $l$  sopanın uzunluğu.
47.  $\frac{2}{3} \frac{F}{M} \frac{a}{R}$
48.  $(v_{x0}, v_{y0} - \frac{5}{7}u)$

## 7. CEVAP ANAHTARI

49.  $L/v_0 + \pi\sqrt{m/2k}$
50.  $\frac{1}{2}\pi^2(n + \frac{1}{2})^2 R \tan \alpha$
51. 1.03 s
52. 2.0 g
53.  $v_1 = v_2 = v$ ;  $\cot^2 \frac{\alpha}{2}$
54.  $\sqrt{gH}$ .
55. 5 m/s.
56. (a)  $\tan \leq 2\mu$  ; (a) imkansız.
57.  $g(1 - \frac{x}{l}) \sin^{-1} \alpha$ ;  $\frac{\pi}{2} \sqrt{l \sin \alpha/g}$
58.  $\mu < \cot \alpha$ .
59.  $\mu_1 < \tan \frac{\alpha}{2}$  ve  $\mu_2 < \tan \frac{\alpha}{2}$ .
60.  $R > h/2$
61.  $\sqrt[3]{3m/\pi\rho}$
62.  $\omega^2 R^2/2g$
63.  $M/m = \frac{(1 - \sin \alpha)^2}{\sin \alpha}$ .
64.  $\frac{2mM}{M+m} g \tan \alpha$
65.  $g/9$ .
66.  $g \frac{m+M}{m+M \sin^2 \alpha} \sin^2 \alpha$ .
67.  $2/3R$
68.  $m[g - v^2(2l - x)/\sqrt{2}l^2]$
69.  $M/m = 4$ ,  $u = \sqrt{gl/8}$ .
70. İlk olay daha önce gerçekleşir.
71. Düz çizgi; eğer  $\omega \neq 0$
72.  $\sqrt{2gl(1 + m/M)}$
73. Eğer  $\frac{F}{m\mu g} < 6$  ise,  $\frac{F}{3m}$ ; eğer  $6 < \frac{F}{m\mu g} < 10$  ise,  $\frac{F}{4m} + \frac{1}{2}\mu g$ ; eğer  $\frac{F}{m\mu g} > 10$  ise,  $3\mu g$ .
74.  $m^2 v^2/2(M^2 - m^2)\mu g$
75.  $v = \sqrt{(l - \frac{H}{2})g}$ ,  $a = \frac{g}{2}(1 - \frac{H}{2l})$ ,  $T = \frac{mg}{4}(3 - \frac{H}{2l} + \frac{l}{6H})$ .
76.  $\arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ 12'$
77.  $M/m = 4$ .
78. (a)  $\omega = 5v_0/7R$ ,  $v_x = 5v_0/7$ ,  $v_y = \sqrt{2gh}$ ;  
(b)  $v_y = \sqrt{2gh}$ ,  $v_x = v_0 - 2\mu v_y$ ,  
 $\omega = 5\sqrt{2gh}\mu/R$ .
79.  $\frac{5}{7}g \sin \alpha$ , eğer  $\mu > \frac{2}{7} \tan \alpha$ , aksi takdirde  $g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$
80.  $\sqrt{\frac{2gr}{m+M} \frac{1 + \cos \varphi}{m \sin^2 \varphi + M}} m \cos \varphi$ ;  
 $\frac{gm \sin 2\varphi}{m \sin^2 \varphi + M} [\frac{1}{2} + \frac{m^2 \cos \varphi(1 + \cos \varphi)}{(m \sin^2 \varphi + M)(m+M)}]$
81. 0.6 m/s
82.  $\frac{1}{4}27\mu v^2$
83.  $v/\cos \alpha$
84.  $n^{-2}Lg/4\pi^2 l$ ,  $n = 1, 2, \dots$
85. (a), (b)  $(p_1 - p_0)V/mc_s$ .
86.  $\frac{1}{2}v_0$ ; hayır, bir kısım çubuğun boylamasına titreşmesine ve sonra da (titreşim söndükçe) ısıya gider.

## 8 Çevirmenler Eki — Translators Appendix

Bu bölümde şunlar vardır:

- Prof. Jaan KALDA tarafından çeviri sürecinde yapılmış ek açıklamalar. Bu açıklamalar genelleştirilmiş koordinatlarla çalışma metodunu detaylıca ele almaktadır.
- Bu açıklamalarla ilgili sonradan çizilen ekstra figür ve denklemler.
- Konuyu destekleyici linkler ve geçmiş uluslararası olimpiyatlardan seçilmiş problemler.

Bu açıklamalar sadece olimpiyat açısından değil, genel fizik bakışı adına da oldukça faydalıdır ve okuyucunun bu bölümü linkler ve belirtilmiş sorular eşliğinde çalışmalarını şiddetle tavsiye edilmektedir.

Alper TEZCAN  
Çeviri ekibi adına

Sıklıkla lisede size, etkileşen cisimlerle ilgilenen soruları çözeniz için kuvvet şemalarını çizmeniz ve  $x$  ve  $y$  bileşenleri için (üç boyutlu sorularda ayrıca  $z$  bileşeni için) kuvvet dengesi eşitlikleri yazmanız (Newton'un 2. yasasına göre) öğretildi. Fakat, temel olanlardan daha zor sorular için bu en basit yaklaşım olmaktan çok uzak. Bu sırada, genelleştirilmiş koordinatlara dayanan ve çoğu durum için çözüme en kolay yolu oluşturan çok güçlü bir yöntem var. Yöntemin temel fikri aşağıdaki şekildedir.

Tüm sistemin durumunun bizim genelleştirilmiş koordinat olarak adlandıracağımız tek bir parametre  $\xi$  ile ifade edilebileceğini varsayalım (yöntem ayrıca iki veya daha fazla parametre ile de uygulanabilir fakat bu işleri karmaşıktır ve birçok durumda tek parametre yeterli olur). Bundan sonra sistemin potansiyel enerjisini  $\Pi$ ,  $\xi$  cinsinden ifade etmelisiniz,  $\Pi = \Pi(\xi)$ , ve sistemin kinetik enerjisini de  $\dot{\xi}$ ,  $\xi$ 'nin zamana göre türevi, cinsinden ifade etmelisiniz:  $K = K(\dot{\xi})$ . Sonra, eğer sistemde enerji kaybı veya sisteme etki eden dış kuvvet yoksa sistemin enerjisi korunur:  $K(\dot{\xi}) + \Pi(\xi) = \text{sabit}$ . Ardından bu ifadenin zamana göre türevini alırsak,  $K'(\dot{\xi})\ddot{\xi} + \Pi'(\xi)\dot{\xi} = 0$  eşitliğini elde ederiz. Buradan da genelleştirilmiş koordinatın ivmesini ifade edebiliriz:

$$\ddot{\xi} = -\frac{\dot{\xi}}{K'(\dot{\xi})}\Pi'(\xi).$$

$K'(\dot{\xi})/\dot{\xi}$  ifadesinin sabit olacağına, çünkü kinetik enerji  $\dot{\xi}^2$  ile orantılı, ve efektif kütle  $M$  rolünü üstlendiğine dikkat ediniz. Bazı durumlarda  $K$  ayrıca  $\xi$ 'ye, ve/veya  $\Pi$  de ayrıca  $\dot{\xi}$ 'ne bağlı olabilir; böyle durumlarda yukarıdaki formül çalışmayacaktır, ama tekniğin kendisi hala uygulanabilir (örn. aşağıdaki dönen yay örneği).

Bu yöntemi açıklamak için basit bir takoz problemi ile başlayalım.  $M$  kütleli bir takoz üzerinde  $m$  kütleli bir top bulunan bir sistem düşünelim, ve top kütsüz ip ve makara ile duvara bağlanıyor (şekle bakınız); sizden takozun ivmesini bulmanız isteniyor. Tüm yüzeylerin sürtünmesiz ve sistemin homojen kütle çekim alanında  $g$  bulunduğunu varsayınız.

Kuvvet şeması yöntemini kullanırken takozla bağlantılı (eylemlili) referans sistemi kullanmak güzel bir fikirdir

This section includes:

- Remarks written by Prof. Jaan KALDA during the translation process. These remarks explains the method of generalized coordinates in detail.
- Extra figures and equations as supplemental materials to these explanations.
- Supporting links and selected problems from past international olympiads.

These explanations are useful not only for the olympiad exams but also for the general physics perspective, and it is highly recommended that to work with links and selected problems for the reader.

Alper TEZCAN  
On behalf of the translation team

Typically you are taught in high school that in order to solve problems with interacting bodies you need to draw force diagrams, and write down the force balance equations (based on Newton II law) for  $x$  and  $y$  components (for three-dimensional problems, also the  $z$ -component). However, for problems which are more difficult than the elementary ones, this is typically far from being the simplest approach. Meanwhile, there is a very powerful method based on generalized coordinates, which provides in most cases the easiest route to the solution. The basic idea of the method is as follows.

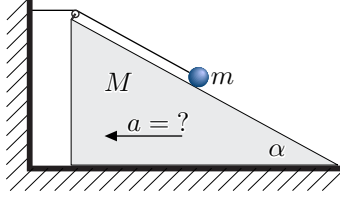
Suppose the state of a system can be described by a single parameter  $\xi$ , which we call the generalized coordinate (the method can be also applied with two or more parameters, but this will complicate things, and in most cases, one parameter is perfectly enough). Then, what you need to do is to express the potential energy  $\Pi$  of the system in terms of  $\xi$ ,  $\Pi = \Pi(\xi)$ , and the kinetic energy in terms of  $\dot{\xi}$ , the time-derivative of  $x$ :  $K = K(\dot{\xi})$ . Then, if there is no dissipation and external forces, the net energy is conserved:  $K(\dot{\xi}) + \Pi(\xi) = \text{const}$ . Upon taking time-derivative of this equality, we obtain  $K'(\dot{\xi})\ddot{\xi} + \Pi'(\xi)\dot{\xi} = 0$ , from where we can express the acceleration of the generalized coordinate:

$$\ddot{\xi} = -\frac{\dot{\xi}}{K'(\dot{\xi})}\Pi'(\xi).$$

Note that most often,  $K'(\dot{\xi})/\dot{\xi}$  is constant, because the kinetic energy is proportional to  $\dot{\xi}^2$ , and plays the role of an effective mass  $M$ . In some cases, it may happen that  $K$  depends also on  $\xi$  and/or  $\Pi$  depends also on  $\dot{\xi}$ ; then, the above formula will not work, but the technique itself remains still applicable (cf. the example of rotating spring below).

In order to illustrate this method, let us start with a simple wedge problem. Consider a system where a ball of mass  $m$  lays on a wedge of mass  $M$ , and is attached with a weightless rope and pulley to a wall as depicted in Figure; you are asked to find the acceleration of the wedge, assuming that all the surfaces are frictionless, and there is a homogeneous gravity field  $g$ .

When using the force diagram method, it would be a good



(Dolayısıyla  $-ma$  ve  $-Ma$  eylemsiz kuvvetleri tanımlanmalıdır), aksi takdirde, topun takozun eğimli yüzeyinde kalacağını açıklayan bir eşitlik yazmak zor olacaktır. Fakat burada bunu okuyucu için bir alıştırmaya bırakıyoruz ve sistemin durumunu takozun yer değiştirmesi  $\xi$  ile tanımlıyoruz. Ardından takozun hızı  $\dot{\xi}$  olur; topun takozu göre hızı da ayrıca  $\dot{\xi}$  olur, topun hızının dikey bileşeninin  $\dot{\xi} \sin \alpha$  olduğunu, ve yatay bileşeninin  $\dot{\xi}(1 - \cos \alpha)$  olduğunu gösterebiliriz. Dolayısıyla,

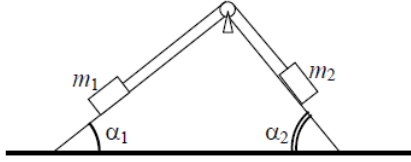
$$K + \Pi = \frac{\dot{\xi}^2}{2} \left\{ M + m \left[ \sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2 \right] \right\} - mg\xi \sin \alpha.$$

eşitliğini buluruz.

Bu ifadenin zamana göre türevini alıp,  $\dot{\xi}$  ifadesini götürerek, takozun ivmesi için yeni bir ifade elde ederiz:

$$\ddot{\xi} = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

Başka bir örnek olarak, eski bir IPhO sorusunu ele alalım (5. IPhO'daki (Sofia, 1971) 1. problem). İnceleyeceğimiz sistem bir önceki sisteme oldukça benzemektedir; ama duvar yoktur, bir top yerine iki tane blok vardır ve takozumuz iki tane eğik düzlem formundadır (şekile bakınız); bu durumda bir önceki problem ile benzer şekilde, takozun ivmesi nedir?



Sistemin iki serbestlik derecesi olduğu için yöntemimizin çalışmayacağını düşünebilirsiniz: sonuçta, hem takoz masa üzerinde kayabilir hem de bloklar takoz üzerinde kayabilir. Ancak, kütle merkezinin korunumunu (yani sisteme etki eden dış kuvvet olmamasını) hesaba katarsak, blokların takozu göre yer değişimini ( $\eta$ ) takozun yer değişimine ( $\xi$ ) göre yazabiliriz:

$$(M + m_1 + m_2)\xi = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)\eta$$

$$\Rightarrow \eta = \xi \frac{M + m_1 + m_2}{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2}.$$

Geriye kalan tek şey şunları yazmaktır:

$$\Pi = \eta g(m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1),$$

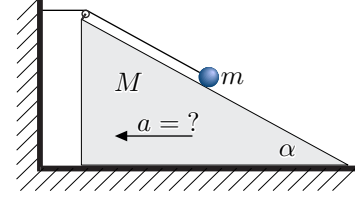
$$K = \frac{1}{2} \left\{ M\dot{\xi}^2 + m_1 [(\dot{\xi} - \dot{\eta} \cos \alpha_1)^2 + \dot{\eta}^2 \sin^2 \alpha_1] \right.$$

$$\left. + m_2 [(\dot{\xi} - \dot{\eta} \cos \alpha_2)^2 + \dot{\eta}^2 \sin^2 \alpha_2] \right\},$$

$\eta$  yerine  $\xi$  yazarak, tüm enerji ifadesinin zamana göre türevini alırız ve böylece  $\ddot{\xi}$  terimini elde ederiz. Bu noktadan sonra geriye sadece biraz cebir yapmak kalmıştır. Eğer bu kısımları doğru yaparsanız şu ifadeyi elde edeceksiniz:

$$\ddot{\xi} = g \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{(m_1 + m_2 + M)(m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}.$$

Oldukça basit bir örnek ise U-tübünde su seviyesinin titreşimi olacaktır. Yüzey alanı sabit olan bu tüpte suyun toplam olarak



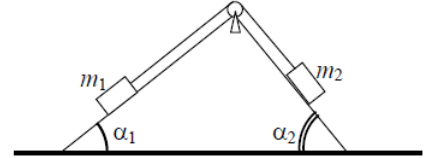
idea to use the (non-inertial) reference frame associated with the wedge (introducing thereby the inertial forces  $-ma$  and  $-Ma$ ), because otherwise, it would be difficult to write down equation describing the fact that the ball will remain on the inclined surface of the wedge. Here, however, we leave this for the reader as an exercise, and describe the state of the system via the displacement  $\xi$  of the wedge. Then, the velocity of the wedge is  $\dot{\xi}$ ; the velocity of the ball with respect to the wedge is also  $\dot{\xi}$ , implying that the vertical component of the ball's velocity is  $\dot{\xi} \sin \alpha$ , and the horizontal component is  $\dot{\xi}(1 - \cos \alpha)$ . Hence, we find that

$$K + \Pi = \frac{\dot{\xi}^2}{2} \left\{ M + m \left[ \sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2 \right] \right\} - mg\xi \sin \alpha.$$

Upon taking time derivative of this equation and cancelling out  $\dot{\xi}$ , we obtain an expression for the wedge acceleration:

$$\ddot{\xi} = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

As another example, let us consider an old IPhO problem (5th IPhO in Sofia, 1971, Problem No 1). The set-up is quite similar to the previous problem, but there is no wall, there are two bricks instead of one ball, and the wedge has two inclined surfaces (see Figure); we ask again, what is the acceleration of the wedge.



You might think that the method does not work here, because there are two degrees of freedom: the wedge can slide on the table, and the bricks can slide with respect to the wedge. However, if we make use of the conservation of the centre of mass (there are no external horizontal forces), we can express the displacement of the bricks  $\eta$  (with respect to the wedge) via the displacement of the wedge  $\xi$ :

$$(M + m_1 + m_2)\xi = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)\eta$$

$$\Rightarrow \eta = \xi \frac{M + m_1 + m_2}{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2}.$$

What is left to do, is to write

$$\Pi = \eta g(m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1),$$

$$K = \frac{1}{2} \left\{ M\dot{\xi}^2 + m_1 [(\dot{\xi} - \dot{\eta} \cos \alpha_1)^2 + \dot{\eta}^2 \sin^2 \alpha_1] \right.$$

$$\left. + m_2 [(\dot{\xi} - \dot{\eta} \cos \alpha_2)^2 + \dot{\eta}^2 \sin^2 \alpha_2] \right\},$$

substitute  $\eta$  by  $\xi$ , take time derivative of the full energy, and express  $\ddot{\xi}$ . Well, there is some math to be done, but that is actually just an algebra. If you do it correctly, you obtain

$$\ddot{\xi} = g \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{(m_1 + m_2 + M)(m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}.$$



$L$  mesafesini kapladığını düşünelim su kolununun denge konumundan sapması (diğer bir değişle su yüksekliği) parametresini ( $\xi$ ) genel koordinat olarak kullanalım.  $\xi > 0$  olan durumda,  $\xi$  kadarlık su kolunu U-tübünün bir kolundan ötekine geçer ve akış olan kolun su seviyesi  $\xi$  kadar yüksektir, bu durum  $\Pi = \rho g S \xi^2$  kadar bir potansiyel enerjiye tekabül etmektedir; ayrıca kinetik enerji adına  $K = \frac{1}{2} S L \rho \dot{\xi}^2$  diyebiliriz. Bu durumda, tekniğimizi uygulayarak  $\ddot{\xi} = -\frac{2g}{L} \xi$  ifadesini elde ederiz, bu sonuç bize çembersel frekansı  $\omega = \sqrt{2g/L}$  olan bir harmonik osilatörü anlatmaktadır.

Aslında, acele edilmesi veya salınım frekansı gereken durumlarda, metodumuzdaki iki adımı (zaman türevi alma ve hareket denklemini yazma) atlayabiliriz. Gerçekten de, harmonik osilatör için,  $K$  ve  $\Pi$  sırası ile  $\dot{\xi}$  ve  $\xi$  parametrelerinin kwadratık fonksiyonlarıdır, diğer bir değişle,  $K = A\dot{\xi}^2$  ve  $\Pi = B\xi^2$  formunda olmalıdır, burada  $A$  ve  $B$  sabittir; sonuç olarak  $\omega = \sqrt{B/A}$  olarak elde edilecektir.

Ayrıca, tekniğimiz basit dönen sistemlerin salınımları analiz etmek için kullanılabilir, şu sistem iyi bir örnektir: İki tane  $m$  kütleli top,  $a$  uzunluklu ve sabiti  $k$  olan bir yaya bağlansın ve  $\vec{L}$  açısai momentumu ile dönsün ( $\vec{L} \perp \vec{a}$ ). Burada da, enerjiye ek bir korunum yasası ile (açısai momentum) efektif serbestlik derecesi sayısını bire düşürürüz. Yayın deformasyonunu,  $x$ , genel koordinat olarak kullanırsak:

$$K = \frac{1}{2} \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{2L^2}{m(a+x)^2} \right], \quad \Pi = \frac{1}{2} kx^2.$$

Bu durum, kinetik enerjinin  $\dot{x}$ 'ın yanı sıra  $x$  ile de değiştii durumda daha farklı bir hal alır. Kinetik enerjinin ikinci terimi, potansiyel enerji gibi davranmaya başlar ve sistemin mekanik enerjisini yazarken bir efektif potansiyel terimi içerisine alınabilir. Tekniğimizi kullanarak,

$$\frac{1}{2} m\ddot{x}\dot{x} - \frac{2L^2}{m(a+x)^3} \dot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{4L^2}{m^2(a+x)^3} - 2\frac{k}{m}x.$$

Bir tanımlama yardımıyla,  $\xi = x - x_0$ , bu hareket denklemini denge durumu  $x_0$  (öyle ki  $x = x_0$  için sağ taraf sıfır oluyor) etrafında lineerleştirilebilir. Lineerleştirmek, doğrusal olmayan bir fonksiyonu doğrusal olan bir fonksiyona yaklaştırmaktır; genelde Taylor açılımındaki ikinci ve daha üst dereceden terimlerin ihmal edilmesiyle, yani  $f(z)$ 'nin yerine  $f'(z_0) \cdot (z - z_0)$  koyarak yapılır. Bu sadece fonksiyonun argümanı küçük bir aralıkta değişiyorsa doğrudur, bu durumda  $\xi/(a+x_0) \ll 1$ . Sonuç olarak,

$$\ddot{\xi} = -2\xi \left[ \frac{6L^2}{m^2(a+x_0)^4} + \frac{k}{m} \right] = -\xi \frac{2k}{m} \left( 1 + \frac{3x_0}{a+x_0} \right),$$

ve bu da bize küçük titreşimin açısai frekansını verir,  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} \left( 1 + \frac{3x_0}{a+x_0} \right)}$ .

Burada yaptığımız şeye lineer stabilite analizi de denir (fizikte sıkça kullanılır). Gerçekten, parametrelerin değerlerinden bağımsız olarak açısai frekansın bir reel sayı olduğu açıkça görülür, yani topların çembersel yörüngeleri her zaman stabildir (açısai frekansın sanal kısmının varlığı sonucun zamanla eksponansiyel artan bir komponenti olduğu anlamına gelir, yani çembersel yörüngedeki hareket stabil olmaz).

Burada dönen yay için kullanılan analizin neredeyse aynıı IPhO-2011 Soru 1'in üçüncü şikkının resmi çözümünde kullanılmaktadır. Ancak bahsi geçen soruda bu tekniği kullanmanın örneğimizdeki kadar kolay olmayacağını görürüz:

A really simple example is provided by water level oscillations in U-tube. Let the water occupy length  $L$  of the U-tube, and let us use the water level height (with respect to the equilibrium level)  $\xi$  as the generalized coordinate. For a state with  $\xi > 0$ , a water column of height  $\xi$  from one arm has been lifted by an height difference  $\xi$  and moved into the other arm of the U-tube, which corresponds to the potential energy  $\Pi = \rho g S \xi^2$ ; meanwhile,  $K = \frac{1}{2} S L \rho \dot{\xi}^2$ . So, upon applying our technique we obtain  $\ddot{\xi} = -\frac{2g}{L} \xi$ , which describes an harmonic oscillator of circular frequency  $\omega = \sqrt{2g/L}$ .

Actually, when in hurry and oscillation frequency is needed, two steps of the scheme (taking time derivative and writing the equation of motion) can be skipped. Indeed, for an harmonic oscillator, both  $K$  and  $\Pi$  need to be quadratic in  $\dot{\xi}$  and  $\xi$ , respectively, ie. should have form  $K = A\dot{\xi}^2$  and  $\Pi = B\xi^2$ , where  $A$  and  $B$  are constants; then,  $\omega = \sqrt{B/A}$ .

Next, the technique can be used to analyse oscillations in simple rotating systems, such as, for instance, a system of two balls of mass  $m$ , connected with a spring of length  $a$  and stiffness  $k$ , rotating with angular momentum  $\vec{L}$  (which is perpendicular to the spring). Here, again, an additional (to the energy) conservation law (of angular momentum) reduces the effective number of degrees of freedom down to one. Let us use the deformation  $x$  of the spring as the generalized coordinate. Then,

$$K = \frac{1}{2} \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{2L^2}{m(a+x)^2} \right], \quad \Pi = \frac{1}{2} kx^2.$$

This case is different in that the kinetic energy depends not only on  $\dot{x}$ , but also on  $x$ ; in effect, the second term of the kinetic energy behaves as a potential one, and can be combined into an effective potential energy in the expression for the full energy. Following our technique,

$$\frac{1}{2} m\ddot{x}\dot{x} - \frac{2L^2}{m(a+x)^3} \dot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{4L^2}{m^2(a+x)^3} - 2\frac{k}{m}x.$$

This equation of motion can be linearised around the state of equilibrium  $x_0$  (such that for  $x = x_0$ , the right-hand-side turns to zero), by introducing  $\xi = x - x_0$ . Linearisation means approximating a non-linear function with a linear one, and is typically done by neglecting in the Taylor expansion quadratic and higher terms, ie. by substituting  $f(z)$  with  $f'(z_0) \cdot (z - z_0)$ ; this is legitimate if the argument varies in a narrow range, in this case for  $\xi/(a+x_0) \ll 1$ . As a result, we obtain

$$\ddot{\xi} = -2\xi \left[ \frac{6L^2}{m^2(a+x_0)^4} + \frac{k}{m} \right] = -\xi \frac{2k}{m} \left( 1 + \frac{3x_0}{a+x_0} \right),$$

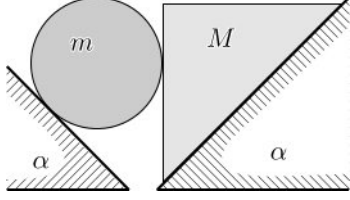
which gives us immediately the circular frequency of small oscillations,  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} \left( 1 + \frac{3x_0}{a+x_0} \right)}$ .

What we did here can be also called a linear stability analysis (which is a very popular technique in physics). Indeed, it is easy to see that regardless of the parameter values, the circular frequency is always a real number, ie. the circular trajectories of the balls are always stable (meanwhile, imaginary circular frequency would mean that the solution includes a component which grows exponentially in time, ie. the regular motion along the circular trajectory would be unstable).

Note that almost exactly the same analysis which was done here for the rotating spring, was used in the "official" solution of the Problem 1 (sub-question 3) of IPhO-2011. However, it

Soruda yapılan kabullerde ve çözümde hata bulunmaktadır; daha detaylı bir analiz için, “Trojanlar stabil midir?” sorusunun ele alındığı [dokümanı](#) bağlantısını inceleyebilirsiniz.

Şu ana kadar çözdüğümüz problemlerde ivmeyi bulmayı amaçlamıştık. Peki kuvveti bulmak isteseydik ne yapardık. Bir sistem ele alalım: Bir küre ve bir takoz karşılıklı iki rampanın üzerine şekildeki gibi yerleştiriliyor, bütün yüzeyler sürtünmesizdir. Takoz ile küre arasındaki normal kuvveti bulun.



Genelleştirilmiş koordinatlar yöntemini kullanarak (koordinat olarak topun yer değişimini kullanarak) topun (veya takozun) ivmesini bulmak fazlasıyla kolay olurdu. İvmeyi bulduktan sonra topla takoz arasındaki tepki kuvveti  $N$  'i bulmak da Newton'un 2. Yasası'nı kullanarak fazlasıyla kolay olur! (Cevap:  $\frac{2mM}{M+m}g \tan \alpha$ .)

Genelleştirilmiş koordinatlar yöntemi kayıp olmayan sistemler için kullanılır. Fakat, bazen sürtünmenin etkin olduğu durumlarda da kullanılabilir. Bu durumu göstermek, bir önceki soruyu sağdaki eğik yüzey sürtünmesiz, soldakinde ise sürtünme olacak şekilde ele alalım. Bu durumda top yüzeyde yuvarlanacaktır, takoz ve top arasındaki kinetik sürtünme katsayısı  $\mu$  'dur.

Burada yapılması gereken şey enerji korunumunu sürtünmenin yaptığı işi de katarak “düzeltmektir”. İlk olarak, böyle bir eşitlik tepki kuvvetini de parametre olarak içerecektir fakat tepki kuvveti sonrasında bulunabilir: tepki kuvvetini önceki problemde yaptığımızla aynı şekilde ifade ederiz ve bu da  $N$  'i bulmak için kullanılacak olan denklem olur. Dolayısıyla,  $K = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 (M + \frac{7}{5}m)$  ve  $\Pi = (m - M)g\xi \sin \alpha$ : temas noktası hem  $(2\xi \sin \alpha)$  uzunluğundaki takozda hem de  $(\xi)$  uzunluğundaki topta net iş  $A = \xi(1 + 2 \sin \alpha)N\mu$  'ya karşılık gelecek “izler” bırakır. Bundan dolayı, enerji korunumu

$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 \left( M + \frac{7}{5}m \right) + (m - M)g\xi \sin \alpha + \xi(1 + 2 \sin \alpha)N\mu = 0$ ,  
olarak yazılır. Buna göre de

$$\ddot{\xi} = \frac{(M - m)g \sin \alpha - (1 + 2 \sin \alpha)N\mu}{M + \frac{7}{5}m}.$$

olduğu sonucuna varılabilir. Şimdi, ağır bir takozumuz olduğu ve sistemin sola doğru hareket ettiğini varsayarak takoz için Newton'un 2. Yasası

$$M \frac{(M - m)g \sin \alpha - (1 + 2 \sin \alpha)N\mu}{M + \frac{7}{5}m} = Mg \sin \alpha - N\mu \sin \alpha - N \cos \alpha,$$

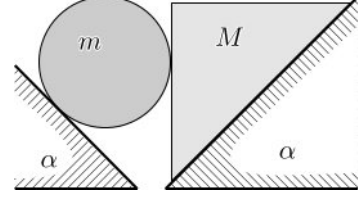
olarak yazılabilir. Dolayısıyla takip eden eşitlik doğrudur.

$$N = \frac{2.4Mmg \sin \alpha}{(M + 1.4m)(\cos \alpha - \mu \sin \alpha - \mu)}$$

Bu yöntemi gösteren son bir örnek olarak, 1859 'da W.H. Besant tarafından ortaya çıkarılmış olan ve 1917 'de Lord Rayleigh tarafından çözülen biraz daha zor bir problem ele alalım:  $p$  basıncındaki  $\rho$  yoğunluklu sıkıştırılmayan bir sıvı ile doldurulmuş olan sonsuz bir boşlukta, iç kısmı vakum olan  $R$  yarıçaplı bir küresel “baloncuk” oluşur. Basınçtan dolayı

appears that for the mentioned problem, this technique cannot be applied as easily: there is one mistake in the solution, and another one among the assumptions of the problem; for more details, see this [mozaic tile](#) on “Are Trojans stable?”.

Up til now we have dealt with problems where the task was to find an acceleration. What to do, if you are asked to find a force? For instance, a sphere and a wedge are placed on two facing ramps as shown in Figure; all the surfaces are frictionless. Find the normal force between the wedge and the sphere. Well, it would be very easy to find the acceleration of the ball



(or that of the wedge) using the method of generalized coordinates (ball displacement can be used as the coordinate). But once we know the acceleration, it is also easy to find the normal force  $N$  between the wedge and the ball from the Newton II law! (The answer is  $\frac{2mM}{M+m}g \tan \alpha$ .)

The method of generalized coordinates is designed to work for dissipation-less systems.. However, in some cases it is also possible to take into account the friction. To illustrate this, let us modify the previous problem so that the right ramp remains frictionless, but the left ramp has high friction, so that the ball will rotate along it, and the friction between the wedge and the ball is described by kinetic friction coefficient  $\mu$ .

The idea here is to “fix” the energy conservation law by adding the work performed by the friction force. Initially, such an equation will involve the normal force as a parameter, but it can be determined later: we express the normal force in the same ways as for the previous problem, and this will be the equation for finding  $N$ . So,  $K = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 (M + \frac{7}{5}m)$  and  $\Pi = (m - M)g\xi \sin \alpha$ ; the contact point leaves “traces” both on the wedge (of length  $2\xi \sin \alpha$ ) and on the ball (of length  $\xi$ ), corresponding to the net work of  $A = \xi(1 + 2 \sin \alpha)N\mu$ . So, the energy conservation law is written as

$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 \left( M + \frac{7}{5}m \right) + (m - M)g\xi \sin \alpha + \xi(1 + 2 \sin \alpha)N\mu = 0$ ,  
from where

$$\ddot{\xi} = \frac{(M - m)g \sin \alpha - (1 + 2 \sin \alpha)N\mu}{M + \frac{7}{5}m}.$$

Now, assuming that we have heavy wedge, and the system moves leftwards, the Newton II law for the wedge can be written as

$$M \frac{(M - m)g \sin \alpha - (1 + 2 \sin \alpha)N\mu}{M + \frac{7}{5}m} = Mg \sin \alpha - N\mu \sin \alpha - N \cos \alpha,$$

and hence,

$$N = \frac{2.4Mmg \sin \alpha}{(M + 1.4m)(\cos \alpha - \mu \sin \alpha - \mu)}$$

. As a final example illustrating this method, let us consider a somewhat more difficult problem, posed by W.H. Besant in 1859, and solved by Lord Rayleigh in 1917: in an infinite space filled with an incompressible liquid of density  $\rho$  at pressure  $p$ , there is a spherical “bubble” of radius  $R$ , which has vacuum

(uzak noktalarda sabit olarak  $p$  'ye eşittir.) oluşan bu “baloncuk” çökmeye başlar; “baloncuğun” tam olarak çökmesinin ne kadar sürdüğünü bulunuz. Burada genelleştirilmiş koordinat olarak “baloncuğun” yarıçapı  $r$  'yi alırız; potansiyel enerji yoktur ama basıncın yaptığı iş  $A = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)p$  'yı hesaba katmamız gerekir. Geriye sıvının kinetik enerjisini  $\dot{r}$  cinsinden ifade etmek kalır. Sıvı sıkıştırılmaz olduğundan, yarıçapı  $x > r$  olan “baloncuğun” merkezi etrafındaki herhangi bir küresel yüzeydeki hacim akışı  $x$  'ten bağımsız olmalıdır:  $4\pi r^2 \dot{r} = 4\pi x^2 v(x) \Rightarrow v(x) = \dot{r} r^2 / x^2$ . Bunu kullanarak kinetik enerji şu şekilde bulunabilir:

$$K = \int_r^\infty \frac{1}{2} \rho \left( \dot{r} \frac{r^2}{x^2} \right)^2 \cdot 4\pi x^2 dx = 2\pi \dot{r}^2 \rho r^3.$$

Dolayısıyla, enerji eşitliği

$$\left( \frac{R}{r} \right)^3 - 1 = \frac{3\rho}{2p} \dot{r}^2.$$

v olarak yazılabilir.

Bu denklem ivmeyi bulmak için kullanılabilir fakat bunun için çökme zamanını bilmemiz gerekir; bundan dolayı  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$  yerine koyup  $dt$ 'yi  $dr$  ve  $r$  cinsinden ifade ederiz:

$$dt = \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1}} \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1}} = R \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \int_0^R \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^{-3} - 1}}.$$

Böylece birimsiz bir integral içeren bir cevaba ulaşmayı başardık:  $\zeta = r/R$ 'yi yerine koymak bize integralin içindeki birimli ifadelerden kurtulmamızı sağladı (eğer mümkünse, integralleri birimsiz yapmak için bu tekniği kullanınız). Bu sonuç olduğu gibi bırakılabilir, nasıl olsa integrallerin sonucunu bulmak metamatikçilerin işidir. Bununla birlikte matematikçiler şu göreve tabi tutulmuştur:  $\int_0^R \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^{-3} - 1}} = \Gamma(\frac{5}{6})/\Gamma(\frac{1}{3})$ ; burada  $\Gamma$ , gama fonksiyonunu ifade etmektedir. Bundan dolayı aşağıdakini yazabiliriz:

$$t = R \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \approx 0.915 R \sqrt{\frac{\rho}{p}}.$$

Son olarak, genelleştirilmiş koordinatlar konusunu bitirirken, bu tekniğin bazı jenerik teoriler - teorik mekanik derslerinde ana konulardan biri olarak öğretilen Lagrange ve Hamilton formalizmleri - yönünde geliştirilebileceği belirtilmelidir. Özellikle, Hamiltonian formalizmi şunların ispatlanmasına olanak tanır: adyabatik invaryantın korunumu, KAM (Kolmogorov-Arnold-Mozer) teoremi, Noether teoremi ve Hamiltonian'ın (veya Lagrangian'ın) simetri özellikleri ile korunum yasalarının türetilmesi. Hamiltonian yaklaşımı genelleştirilmiş hız  $\xi$  yerine genelleştirilmiş momentum  $p$  kullandığı için burada anlatılandan farklılık gösterir. Kinetik enerjinin genelleştirilmiş hızın karesi ile orantılı olduğu tipik durumlarda efektif kütle kullanılabilir  $\mathcal{M}$  (yukarıda tanımlanmıştır):  $p = \mathcal{M}\dot{\xi}$ ,  $K = p^2/2\mathcal{M}$ . Bu durumda toplam enerji  $H = K + \Pi$  için olan ifade  $\xi$ 'den ve  $p$ 'den fonksiyondur, ve buna Hamiltonian denir; hareket denklemi bir denklem sistemi şeklinde yazılır,  $\dot{p} = -\partial H/\partial \xi$ ,  $\dot{\xi} = \partial H/\partial p$ . Fakat, problem çözerken pratik olmak açısından, yukarıda açıklanan genelleştirilmiş koordinatların kolaylaştırılmış yaklaşımı gayet yeterlidir!

Bir kuyruklu yıldızın eksantrikliği birden çok büyüktür

inside. Due to the pressure (far away, it is kept equal to  $p$ ), the “bubble” starts collapsing; find the collapse time of the “bubble”. Here we use the radius  $r$  of the “bubble” as the generalized coordinate; there is no potential energy, but there is work done by the pressure,  $A = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)p$ . What is left to do, is to express the kinetic energy of the fluid in terms of  $\dot{r}$ . Due to the incompressibility of the fluid, the volume flux of liquid through any spherical surface of radius  $x > r$  around the centre of the “bubble” is independent of  $x$ :  $4\pi r^2 \dot{r} = 4\pi x^2 v(x) \Rightarrow v(x) = \dot{r} r^2 / x^2$ . So, the kinetic energy can be found as

$$K = \int_r^\infty \frac{1}{2} \rho \left( \dot{r} \frac{r^2}{x^2} \right)^2 \cdot 4\pi x^2 dx = 2\pi \dot{r}^2 \rho r^3.$$

So, the energy balance can be written as

$$\left( \frac{R}{r} \right)^3 - 1 = \frac{3\rho}{2p} \dot{r}^2.$$

This equation could be used to find the acceleration  $\ddot{r}$ ; however, we need to know the collapse time; so we put  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ , and express  $dt$  in terms of  $dr$  and  $r$ :

$$dt = \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1}} \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1}} = R \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \int_0^R \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^{-3} - 1}}.$$

Thus, we were able to obtain an answer, which contains a dimensionless integral: substituting  $\zeta = r/R$  allowed us to get rid of the dimensional quantities under the integral (if possible, always use this technique to convert integrals into dimensionless numbers). This result could be left as is, since finding an integral is a task for mathematicians. The mathematicians, however, have been up to the task:  $\int_0^R \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^{-3} - 1}} = \Gamma(\frac{5}{6})/\Gamma(\frac{1}{3})$ , where  $\Gamma$  denotes the gamma function. So, we can write

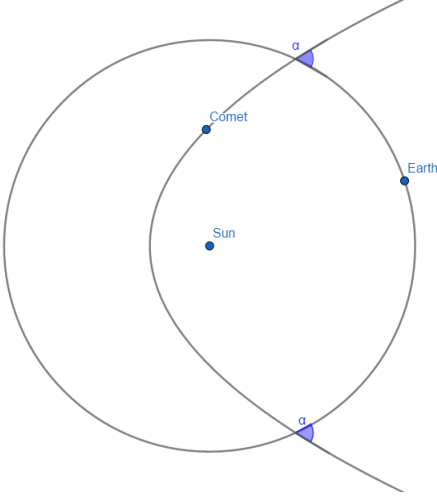
$$t = R \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \approx 0.915 R \sqrt{\frac{\rho}{p}}.$$

Finally, to close the topic of the generalized coordinates, it should be mentioned that this technique can be developed into generic theories - Lagrangian and Hamiltonian formalisms, which are typically taught as a main component of the course of theoretical mechanics. In particular, the Hamiltonian formalism makes it possible to prove the conservation of adiabatic invariant, as well as the KAM (Kolmogorov-Arnold-Mozer) theorem, as well as to derive conservation laws from the symmetry properties of the Hamiltonian (or Lagrangian) using the Noether's theorem. The Hamiltonian approach differs from what is described here by using the generalized momentum  $p$ , instead of the generalized velocity  $\dot{\xi}$ . For the most typical cases when the kinetic energy is proportional to the square of the generalized velocity, one can just use the effective mass  $\mathcal{M}$  (defined above):  $p = \mathcal{M}\dot{\xi}$ ,  $K = p^2/2\mathcal{M}$ . Then, the expression for the full energy  $H = K + \Pi$  is considered as a function of  $\xi$  and  $p$ ,  $H = H(p, \xi)$ , and is called the Hamiltonian; the equation of motion is written in the form of a system of equations,  $\dot{p} = -\partial H/\partial \xi$ ,  $\dot{\xi} = \partial H/\partial p$ . However, for the practical application of problem solving, the simplified approach to the generalized coordinates provided above is just enough!

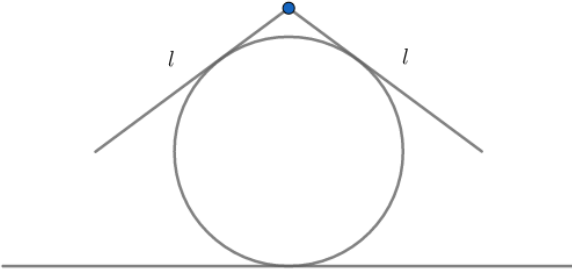
The ellipticity of a comet's trajectory is much larger than one, and its perihelion is at the distance  $R/2$ , where  $R$  is the

ve perihelyonu  $R/2$  uzaklıktadır, burada  $R$  Dünya'nın yörüngesinin yarıçapıdır. Kaç gün boyunca kuyruklu yıldız ile güneş arasındaki mesafe  $R$ 'den küçük olacaktır? (Daha iyi anlamak için, bir sonraki sorudaki şekile bakınız.)

Bir kuyruklu yıldız parabolik bir yörünge izlemektedir. Yıldızın yörüngesiyle dünyanın yörüngesi  $A$  ve  $B$  noktasında  $\alpha$  açısıyla kesişmektedir.  $A$  ve  $B$  noktası arasındaki uzaklığı bulunuz. Dünyanın yörüngesi yarıçapı  $R_e$  olan bir çember olarak düşünülebilir.



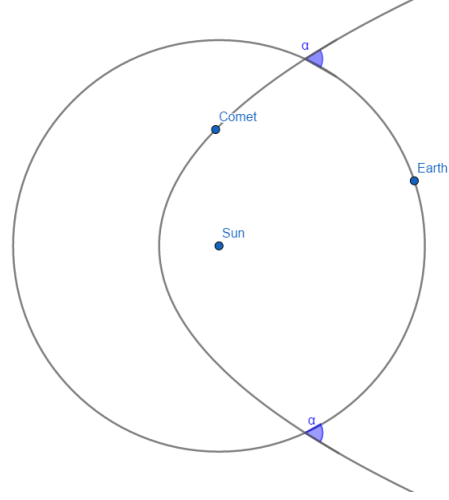
İki homojen özdeş  $l$  uzunluklu dikdörtgenel plaka bir menteşe ile tutturulmuştur ve kaygan bir silindirin üzerine şekildedeki gibi konulmuştur (yandan görünüş). Plakaların arasındaki  $\alpha$  açısını bulununuz.



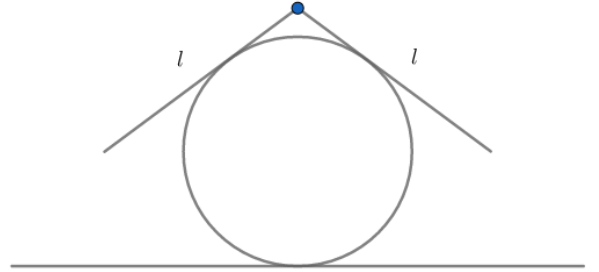
Son olarak, şu sorulara da bakmanız iyi olacaktır: IPhO 1968 Soru 1, IPhO 1969 Soru 1. Bahsi geçen sorulara [bu adresten](#) ulaşabilirsiniz.

radius of the Earth's orbit. For how many days will the comet-Sun distance be shorter than  $R$ ? (To understand better, figure in the next question can be considered)

A comet moves along a parabolic trajectory; its trajectory intersects with the trajectory of Earth at points  $A$  and  $B$  at angle  $\alpha$ . Find the distance between points  $A$  and  $B$ . The trajectory of Earth can be considered to be a circle of radius  $R_e$ .



Two homogeneous rectangular plates of negligible thickness and length  $l$  are connected via a hinge and put lying onto a horizontal slippery cylinder as shown in figure (side view). Find the angle  $\alpha$  between the plates.



Finally, checking these questions are recommended: IPhO 1968 Problem 1, IPhO 1969 Problem 1. You can attain them from [this link](#).