Öncelikle merhaba arkadaşlar. Bu yazımda olimpiyat dışı fakat olimpiyat konularını anlamada çok yardımcı olan Fourier analizini anlatmaya çalışacağım.

Fourier serilerine baktıktan sonra dönüşümlerine bakacağız.

Fourier Serileri: Fourier serileri periyodik fonksiyonların trigonometrik ve üstel fonksiyonların toplamı olarak incelenmesine dayanır.

x herhangi bir reel sayı olmak üzere:

$f(x) = f(L+x)$ koşulunu her zaman sağlayan bir fonksiyon

n bir doğal sayı olmak üzere $T_{f(x)} = L/n$ periyoduna sahiptir ve sin ve cos fonksiyonlarının toplamı olarak gösterilebilir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]$$

cos ve sin fonksiyonlarının bir periyot üzeri integralleri sıfır olduğundan a_0'ın tayini çok kolaydır.

$$\int_a^{L+a} f(x)\,dx = \int_a^{L+a} a_0\,dx + 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L}\int_a^{L+a} f(x)\,dx = a_0 \quad \text{olur.}$$

Bu katsayıyı kolayca tayin ettik. Diğerleri için ise küçük bir hile yapmamız gerek. Bahsettiğimiz hileye geçmek için birkaç fonksiyonun integraline bakmalıyız.

$$\int_a^{L+a} \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_a^{L+a}\left\{\sin\left(\frac{2\pi x(m-n)}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x(m+n)}{L}\right)\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^{L+a} -\frac{L}{2\pi}\left\{\frac{\cos\left(\frac{2\pi x(m-n)}{L}\right)}{n-m} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi x(m+n)}{L}\right)}{m+n}\right\} dx$$

$= 0$ {$n=m$ ayrı incelenmelidir fakat başta $\sin(0)=0$ olduğundan kolayca farkedilir}

Bir kaç integrale daha bakalım.

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\cos\left(\frac{2\pi x}{L}(n-m)\right) + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}(n-m)\right)\right\}dx = I_1$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\cos\left(\frac{2\pi x}{L}(n-m)\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}(n+m)\right)\right\}dx = I_2$$

Bu iki integralde $n \neq m \Rightarrow I_1, I_2 = 0$ $n = m \Rightarrow I_1, I_2 = \frac{L}{2}$ olur.

$\delta_{NM} \Rightarrow$ Knocker deltası $n=m$'de 1 $n \neq m$'de 0 alır.

$$\Rightarrow \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{NM}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{NM}$$

Bu fonksiyonlar $n=m$ değilse sıfır olduğundan biz bunlara ortogonal (dik) fonksiyonlar deriz.

Diklik A ve B birer vektör olursa bunların iç çarpımlarının sıfır verdiği durum için tanımlanmıştır.

$A.B = (a_x, a_y, a_z)(b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (iç çarpım)

Fonksiyonlarda da belirli bir a,b aralığındaki integral sıfır veriyorsa bu fonksiyonlar o aralıkta ortogonaldir denir ve bu integral iç çarpım olarak tanımlanır.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \equiv \text{iç çarpım}$$

Şimdi yukarıdaki integrallerden haberdar olduğumuza göre katsayıları atayabiliriz.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{L+a} f(x)dx$$ demiştik.

Şimdi de a_n ve b_n'i bulalım.

$$\int_a^{\lambda+a} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)dx = \int_a^{\lambda+a} a_0\cos\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)dx + \sum_{\substack{n=1\\(n\neq m)}}^{\infty} a_n \int_a^{\lambda+a}\cos\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)dx + a_m\int_a^{\lambda+a}\cos^2\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_a^{\lambda+a}\cos\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)\sin\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)dx$$

1, 2, 4. termler bahsettiğimiz hile sayesinde gider.

$$\Rightarrow \int_a^{\lambda+a} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)dx = a_m\int_a^{\lambda+a}\cos^2\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)dx = a_m\int_a^{\lambda+a}\left\{\frac{1+\cos\left(\frac{4\pi m x}{\lambda}\right)}{2}\right\}dx$$

$$= \frac{a_m \lambda}{2}$$

$$a_m = \frac{2}{\lambda}\int_a^{\lambda+a} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)dx \qquad \text{olur.}$$

Aynı şekilde

$$\int_a^{\lambda+a} f(x)\sin\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)dx = b_m\int_a^{\lambda+a}\sin^2\left(\frac{2\pi m x}{\lambda}\right)dx = b_m\int_a^{\lambda+a}\left\{\frac{1}{2}+\frac{\cos(4\pi m x/\lambda)}{2}\right\}dx$$

$$= \frac{b_m \lambda}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda}\int_a^{\lambda+a} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)dx \qquad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_a^{\lambda+a} f(x)dx + \frac{2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\int_a^{\lambda+a} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)dx\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right) + \left(\int_a^{\lambda+a} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)dx\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)\right\}$$

olur. //

Örnek: $-L/2 \le x \le L/2$ aralığında tekrar eden Ax fonksiyonu.
İntegraller $\int_a^{L+a}$ şeklinde alınır. Biz bunları $\int_{-L/2}^{L/2}$ şeklinde alıp Ax'in tek fonksiyon olma avantajını kullanırsak baştaki katsayı ve cos'lu terimlerin hepsi gider. Çünkü tek bir fonksiyon ancak tek fonksiyonların, burada sinüslerin toplamı olarak ifade edilir.

$$\Rightarrow Ax = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{\left(\int_{-L/2}^{L/2} Ax \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx\right)}_{I} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}$$

$$I = A\int_{-L/2}^{L/2} x\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx = -\frac{L\,Ax\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)}{2\pi n}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} + \cancel{A\int_{-L/2}^{L/2}\frac{Lx}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx} \rightarrow 0$$

$$I = -\frac{AL}{2\pi n}\left\{\frac{L}{2}\cos(\pi n)\right\}\cdot 2$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{AL^2}{2\pi n}$$

$$\Rightarrow Ax = \frac{2}{L}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{AL^2}{2\pi n}\right\}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

$$Ax = \frac{AL}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \quad //$$

Örnek: $-L/2 \leq x \leq L/2$ aralığında tekrar eden $f(x) = Ax^2$ fonksiyonu.

Bu fonksiyon çift olduğundan sinüsleri eleyebiliriz.

$$f(x) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} A x^2\, dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\int_{-L/2}^{L/2} A x^2 \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}$$

$$= \frac{A}{L}\left(\frac{L^3}{8\cdot 3}+\frac{L^3}{8\cdot 3}\right) + \frac{2A}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\left\{\int_{-L/2}^{L/2} x^2\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{AL^2}{12} + \frac{2A}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) I$$

$$I = \left\{\int_{-L/2}^{L/2} x^2\, d\left(\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right)\right\}\frac{L}{2\pi n} = \frac{L}{2\pi n}\left(x^2\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - 2\int x\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx\right)\Bigg|_{x=-L/2}^{x=L/2}$$

$$= \frac{L}{2\pi n}\left(\cancelto{0}{x^2\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)} + \frac{L}{\pi n}\left\{x\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - \frac{L}{2\pi n}\int\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx\right)\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{L^2}{2\pi^2 n^2}\left\{x\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - \frac{L^2}{4\pi^2 n^2}\cancelto{0}{\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)}\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

$$I = \frac{L^3}{2\pi^2 n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{AL^2}{12} + \frac{2A}{L}\frac{L^3}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

$$f(x) = Ax^2 = \frac{AL^2}{12} + \frac{AL^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \quad //$$

Fourier Üstel Serileri:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right\}$$

Bu bölümde sin ve cos fonksiyonlarının karmaşık gösterimlerini kullanacağız.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right\}$$ olarak da yazılabilir fakat

a_0'ı ayrı yazmak bizi 0 ile çarpılan b_0'ı bulmaktan kurtarır.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \left\{ \frac{e^{i2\pi n x/L} + e^{-i2\pi n x/L}}{2} \right\} + b_n \left\{ \frac{e^{i2\pi n x/L} - e^{-i2\pi n x/L}}{2i} \right\} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n - i b_n}{2}\right) e^{i2\pi n x/L} + \left(\frac{a_n + i b_n}{2}\right) e^{-i2\pi n x/L} \right)$$

$$= \underset{\downarrow \, C_0}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i2\pi n x/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_N e^{i2\pi n x/L}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{i2\pi n x/L}$$ olarak (yani üstel biçimde) gösterilebildiğini kanıtladık.

Şimdi e^{ix} fonksiyonunun sin ve cosların toplamı olarak yazılabildiğini bildiğimize göre buna da bir ortogonal fonksiyon bulabiliriz.

$$\int_a^{L+a} e^{i2\pi n x/L} e^{i2\pi m x/L} \, dx = \int_a^{L+a} \frac{L}{i2\pi(m+n)} e^{i2\pi(n+m)x/L} \, dx = L\,\delta_{(N X - M)}$$

$$\Rightarrow \int_a^{L+a} f(x) e^{-i2\pi m x/L} \, dx = \int_a^{L+a} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{i2\pi n x/L} \, dx$$

$$\frac{1}{L} \int_a^{L+a} f(x) e^{-i2\pi m x} \, dx = C_M$$

$$f(x) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(\int_a^{L+a} f(x)\, e^{-i2\pi n x/L}\,dx\right) e^{i2\pi n x/L}$$

//

Örnek: Yeniden $Ax = f(x)$ | $-L/2 \leq x \leq L/2$

$$Ax = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(\int_{-L/2}^{L/2} Ax\, e^{-i2\pi n x/L}\,dx\right) e^{i2\pi n x/L}$$

$$Ax = \frac{A}{L}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{i2\pi n x/L}\Bigg(\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} x\, e^{-i2\pi n x/L}\,dx}_{I}\Bigg)$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x\, e^{-i2\pi n x/L}\,dx = \frac{\cancel{-}iL}{\cancel{i}2\pi n}\, x e^{-i2\pi n x/L}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} + \frac{L}{i2\pi n}\int_{-L/2}^{L/2} e^{-i2\pi n x/L}\,dx$$

$$= \frac{iL}{2\pi n}\,\frac{L}{2}\left(e^{-i\pi n x} + e^{i\pi n x}\right) + \frac{L^2}{4\pi^2 n^2}\underbrace{\cancel{\left(e^{-i\pi n L/L} - e^{+i\pi n L/L}\right)}^{0}}_{\sin x\big|_{-L/2}^{L/2}}$$

$$= \frac{iL^2}{2\pi n}\cos(\pi n)$$

$$\Rightarrow Ax = \frac{iAL}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{n=\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\left\{\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}$$

$$Ax = \frac{AL}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

$$Ax = \frac{AL}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$ → trigonometrik ile aynı sonuç

//

Biraz da C_n katsayılarıyla alakalı bazı özelliklere bakalım.

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu gerçekse:

$$C_n^* = C_{-n}$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu tamamen imajiner ise:

$$C_n^* = -C_{-n}$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu çift ise sadece cos'lar vardır.

$\Rightarrow \quad C_n = C_{-n}$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu tek ise sadece sin'ler vardır.

$\Rightarrow \quad C_n = -C_{-n}$

~ Fourier Serilerinin Sonu ~

Fourier Transformları (Dönüşümleri):

Fourier serilerinde eğer bir fonksiyon periyodikse bunu sin ve cos'ların toplamı ya da üstel fonksiyonların toplamı olarak gösterebildiğimizi gösterdik. Biz bu yaklaşımı periyodik olmayan fonksiyonlara nasıl uygulayabiliriz?

Cevap aslında basit $-L/2 \leq x \leq L/2$ aralığında periyodik den $f(x)$'te L'yi sonsuza götürerek. Burada üstel fonksiyonlarla bulduğumuz iki denklemi hatırlayalım.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{i2\pi nx/L} \quad (1) \qquad C_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i2\pi nx/L} dx \quad (2)$$

iki doğal sayı arasındaki fark $dn = 1$'dir. $k_n = 2\pi n/L$ diye bir tanım yaparsak $dk_n/d_n = 2\pi/L$ olur.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{ikx} \frac{L}{2\pi} dk_n$$

$$\frac{L C_n}{2\pi} = C_{kn} \quad \text{olsun}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{kn} e^{ikx} dk_n \qquad (dk_n \text{ çok küçüktür.})$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} dk \quad //$$

(2)'ye tanımlarımızı yerleştirelim:

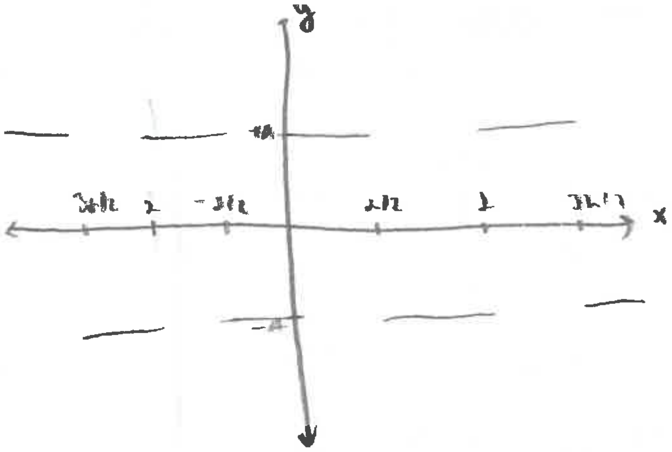
$$\frac{2\pi}{L} C_{kN} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$C_{kN} = \frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ikx} dx \quad //$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\, e^{ikx}\, dk \qquad C(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$C(k)$ $f(x)$ in Fourier transformu olarak bilinir

Örnek: Periyodik adım fonksiyonunu gösterelim. Bu fonksiyon sürekli değildir. (Zaten Fourier serisine sahip olmak için süreklilik aramayız.) $-L/2 \le x \le 0$ aralığında $-A$ $0 \le x \le L/2$ aralığında $+A$ değerini alır.



Görüldüğü üzere fonksiyon tektir. Bundan dolayı integralleri $[-L/2, L/2]$ aralığında alırsak cos lu terimler ve a_0 0 olur.

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\left\{ \int_0^{L/2} A \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx - \int_{-L/2}^{0} A \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \right\}$$

$$= \frac{L}{2\pi n}\,\frac{2A}{L}\left\{ -\cos\frac{2\pi n x}{L}\Big|_0^{L/2} + \cos\frac{2\pi n y}{L}\Big|_{-L/2}^{0} \right\}$$

$$= \frac{L}{2\pi n}\,\frac{2A}{L}\left(-\cos \pi n + 1 + 1 - \cos \pi n\right)$$

$$b_n = \frac{2A}{\pi n}(1 - \cos \pi n) \qquad (n \text{ çift ise } b_n \text{ 0'dır})$$

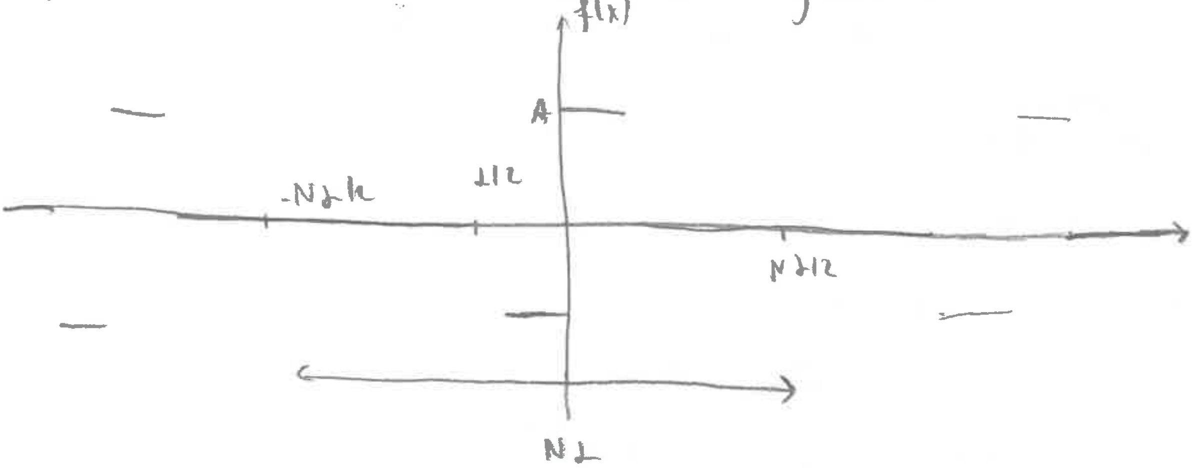
$$f(x) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1,3,5,7,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

$x = L/4$ dersek

$$A = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right)$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$ seri toplamını elde etmiş oluruz.

Örnek: Periyodik olmayan adım fonksiyonu alalım yine $-L/2 \le x \le 0$ da $-A$, $0 \le x \le L/2$ de $+A$ olsun fakat bu sefer bu değerler dışında 0 olsun. Bunu periyodik bir fonksiyon olarak düşünüp sonradan periyodunu ∞'a götürebiliriz. Ya da direk C_k integrallerini alabiliriz.



Fonksiyon görüldüğü gibi tektir. Bundan dolayı saptamamız gereken tek şey b_n katsayılarıdır.

$$b_n = \frac{2}{NL}\int_{-\frac{NL}{2}}^{\frac{NL}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{NL}\right)dx = \frac{4}{NL}\int_0^{L/2} A\sin\left(\frac{2\pi n x}{NL}\right)dx$$

$$= \frac{4A}{NL}\frac{NL}{2\pi n}\left(1 - \cos\frac{2\pi n L}{NL\cdot 2}\right)$$

$$= \frac{2A}{\pi n}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi n x}{NL}\right)$$

$dn = 1$ 'dir. (iki doğal sayı arası fark)

$z_n = n/N$ olarak tanımlansın.

$dz_n/dn = 1/N$ olur.

$$f(x) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z_n \cdot N}\left(1-\cos(\pi z_n)\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L} z_n\right) N\, dz_n$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi z_n} \left(1-\cos(\pi z_n)\right) \sin\left(\frac{2\pi z_n x}{L}\right) dz_n$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \left(1-\cos(\pi z)\right) \sin\left(\frac{2\pi z x}{L}\right) dz \quad //$$

Diğer bir yoldan C_k ile deneyelim.

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{L/2} A\, e^{-ikx}\, dx - \int_{-L/2}^{0} A\, e^{-ikx}\, dx \right\}$$

$$= \frac{A}{(-ik)2\pi} \left(e^{-ikL/2} - 1 - 1 + e^{ikL/2}\right)$$

$$= \frac{Ai}{2\pi k} \left(e^{ikL/2} + e^{-ikL/2} - 2\right)$$

$$= \frac{Ai}{\pi k} \left(\cos\left(\frac{kL}{2}\right) - 1\right)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k\, e^{ikx}\, dk$$

$$f(x) = \frac{Ai}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\cos\left(\frac{kL}{2}\right) - 1\right) e^{ikx}\, dk$$

$$= \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)\right) \sin kx\, dk$$

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)\right) \sin(kx)\, dk$$

(Fark ederseniz bulduğumuz bu integral yukarıdakinin aynısıdır, tek gereken değişken dönüşümüdür.)